MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT IV–VIII KLASSILE

MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT

MATEMAATILISED SÜMBOLID

$a+b$ — arvule a liita arv b
$a-b$ — arvust a lahutada arv b
$a \cdot b$ — arv a korrutada arvuga b
$a:b$, $\frac{a}{b}$ — arv a jagada arvuga b
$a:b$ — arv a jagub arvuga b
$|a|$ — arvu a absoluutväärtus
a^n — arv a astmes n ehk a n-ndas astmes (n võib olla mistahes naturaalarv)
$\sqrt[n]{a}$ — n-es juur arvust a (n võib olla mistahes naturaalarv)
$\sqrt{a}$ — ruutjuur arvust a
( ) — ümarsulud
[ ] — nurksulud
{ } — looksulud
— võrrandisüsteemi ja võrratusesüsteemi märk
$a=b$ — arv a võrdub (on võrdne) arvuga b
$a \neq b$ — arv a ei võrdu (ei ole võrdne) arvuga b
$a \equiv b$ — arv a on samaselt võrdne arvuga b
$a > b$ — arv a on suurem kui arv b
$a < b$ — arv a on väiksem kui arv b
$a \geqslant b$ — arv a on suurem kui arv b või võrdne sellega (arv a ei ole väiksem kui arv b)
$a \leqslant b$ — arv a on väiksem kui arv b või võrdne sellega (arv a ei ole suurem kui arv b)
$a \approx b$ — arv a on ligikaudu võrdne arvuga b
$x \approx a\ (\pm \alpha)$ — arvu x lähend a on antud täpsusega α
Δa — arvu a absoluutse vea ülemmäär
$\delta\ (a)$ — arvu a relatiivse ehk suhtelise vea ülemmäär
$V\ (a; b; \ldots)$ — arvude $a, b, \ldots$ vähim ühiskordne
$S\ (a; b; \ldots)$ — arvude $a, b, \ldots$ suurim ühistegur
% — protsent
$A\ (3)$ — punkt A koordinaadiga 3 (arvteljel)
$A\ (3; -2)$ — punkt A koordinaatidega 3 ja -2 (koordinaattasandil)
$x \in A$ — element x kuulub hulka A
$x \notin A$ — element x ei kuulu hulka A
$A \subset B$ — hulk A on hulga B osahulk

MATEMAATILISED SÜMBOLID

$A \not\subset B$ — hulk A ei ole hulga B osahulk
$A \cap B$ — hulkade A ja B ühisosa
$A \cup B$ — hulkade A ja B ühend
$\varnothing$ — tühihulk
A'_B — hulga A täiend hulgani B
$A \times B$ — hulkade A ja B ristkorrutis
N — kõigi naturaalarvude hulk
Z — kõigi täisarvude hulk
Q — kõigi ratsionaalarvude hulk
Z^+ — kõigi positiivsete täisarvude hulk
Q^+ — kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulk
Z^- — kõigi negatiivsete täisarvude hulk
Q^- — kõigi negatiivsete ratsionaalarvude hulk
I — kõigi irratsionaalarvude hulk
R — kõigi reaalarvude hulk
$[AB]$ — lõik AB
AB — lõigu AB pikkus
$[AB)$ — kiir AB
(AB) — sirge AB
$[ab]$ — riba ab
ΔABC — kolmnurk ABC
$\angle ABC$ — nurk ABC
$\widehat{ABC}$ — nurga ABC suurus
$\smile AB$ — kaar AB
$\widehat{AB}$ — kaare AB suurus
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ — kolmnurk ABC on kongruentne kolmnurgaga DEF
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ — kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga DEF
$s \perp t$ — sirge s on risti sirgega t
$s \parallel t$ — sirge s on paralleelne sirgega t (sirge s on samasihiline sirgega t)
$s \nparallel t$ — sirge s ei ole paralleelne sirgega t (sirge s ei ole samasihiline sirgega t)
$\vec{s} \parallel \vec{t}$ — vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on kollineaarsed
$\vec{s} \uparrow\uparrow \vec{t}$ — vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on kollineaarsed ja samasuunalised
$\vec{s} \uparrow\downarrow \vec{t}$ — vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on kollineaarsed ja vastassuunalised

P. KASEMA, A. LIND

MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT

IV—VIII KLASSILE

2., ÜMBERTÖÖTATUD TRÜKK

TALLINN «VALGUS» 1986

51
K18

Retsenseerinud E. Jõgi, E. Jürimäe, K. Velsker

Kaane kujundanud I. Pääsuke

Kasema, P., Lind, A.

K18 Matemaatika käsiraamat IV—VIII klassile — Tallinn: Valgus, 1986. — 368 lk., 320 joonist.

Raamat on mõeldud õpilastele koduseks töövahendiks tingimustes, kus matemaatikaõpik laenutatakse vaid jooksvaks õppeaastaks.

Käsiraamat vastab kehtivale matemaatikaprogrammile ja annab läbilõike IV—VIII klassi matemaatikakursusest. Ta sisaldab matemaatika koolikursuse mõisteid, definitsioone, teoreeme, omadusi, valemeid ja eeskirju. Rohkesti on näiteid ja jooniseid.

Raamat on mõeldud eeskätt IV—VIII kl. õpilastele, kuid sobib kasutamiseks ka vanemate klasside õpilastele, matemaatikaõpetajatele ja üliõpilaskandidaatidele.

K $\frac{4306020400—017}{M902(16)—86}$ 119—85 22.1

Пеэтер Касема, Аавo Линд. **Справочник по математике для IV—VIII классов.** Издание 2-е, переработанное. На эстонском языке. Художник-оформитель И. Пяэзуке. Таллин, «Валгус». Toimetaja T. Kilgas. Kunstiline toimetaja M. Henno. Tehniline toimetaja L. Krikmann. Korrektorid S. Uustare, E. Martoja.
ИБ № 4263.
Laduda antud 18. 01. 85. Trükkida antud 17. 10. 85. Formaat 60×90/16. Trükipaber nr. 2. Kiri: literaturnaja. Kõrgtrükk. Tingtrükipoognaid 23,0+0,25 (ees-ja tagaleht). Tingvärvitõmmiseid 23,5. Arvestuspoognaid 16,47+0,54 (ees- ja tagaleht). Trükiarv 50 000. Tellimuse nr. 239. Hind 80 kop. Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10. Hans Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. I

© Kirjastus «Valgus», 1982
© Kirjastus «Valgus», 1986, muudatused

SISUKORD

Autoritelt — 10

1. Mõisteid hulgateooriast — 11

1.1. Hulk ja selle element — 11
1.2. Hulkade tähistamine ja esitusviisid — 11
1.3. Hulkade skemaatiline esitamine. Elemendi kuuluvus hulka — 12
1.4. Lõplik ja lõpmatu hulk. Tühihulk. Hulkade võrdsus — 13
1.5. Osahulk — 14
1.6. Hulkade ühisosa — 15
1.7. Hulkade ühend — 17
1.8. Hulkade täiend — 19

2. Mõisteid loogikast — 20

2.1. Mõiste definitsioon. Algmõisted ja tuletatud mõisted — 20
2.2. Teoreem ja selle tõestus. Aksioom — 21
2.3. Pöördteoreem ja vastandteoreem — 21
2.4. Tarvilik ja piisav tingimus — 23

3. Arvu mõiste laiendamine — 25

3.1. Ajalooline ülevaade — 25
3.1.1. Arvu mõiste — 25
3.1.2. Numbri mõiste — 26
3.1.3. Kümnendsüsteemi mõiste — 26
3.1.4. Meetermõõdustik. Rahvusvaheline mõõtühikute süsteem (SI) — 28
3.2. Naturaalarvud — 30
3.2.1. Naturaalarv. Järguühik. Järkarv — 30
3.2.2. Seoseid naturaalarvude vahel — 31
3.2.3. Naturaalarvude hulga põhiomadusi — 32
3.2.4. Naturaalarvude liitmine — 32
3.2.5. Naturaalarvude lahutamine — 33
3.2.6. Naturaalarvude korrutamine — 35
3.2.7. Naturaalarvude jagamine — 37
3.2.8. Naturaalarvude jaguvus. Arvu tegurid ja kordsed — 39
3.2.9. Jaguvuse tunnused — 39
3.2.10. Algarv ja kordarv — 41
3.2.11. Antud arvude suurim ühistegur — 41

3.2.12. Antud arvude vähim ühiskordne — 42
3.2.13. Naturaalarvude jäägiga jagamine — 43
3.2.14. Tehete järjekord — 43
3.2.15. Seoseid tehete komponentide ja resultaadi vahel — 44
3.2.16. Tehete teisi omadusi — 45

3.3. Kümnendmurd — 47
3.3.1. Kümnendmurru mõiste — 47
3.3.2. Kümnendmurdude võrdlemine — 48
3.3.3. Kümnendmurdude liitmine ja lahutamine — 48
3.3.4. Kümnendmurdude korrutamine — 50
3.3.5. Kümnendmurdude jagamine — 51

3.4. Täisarvud — 52
3.4.1. Positiivsed ja negatiivsed arvud — 52
3.4.2. Arvtelg. Punkti koordinaat — 53
3.4.3. Täisarvud — 54
3.4.4. Täisarvude hulga omadusi — 55
3.4.5. Arvu absoluutväärtus — 55
3.4.6. Täisarvude liitmine ja lahutamine — 55
3.4.7. Täisarvude korrutamine ja jagamine — 57
3.4.8. Täisarvude astendamine — 58

3.5. Harilik murd — 59
3.5.1. Hariliku murru mõiste — 59
3.5.2. Hariliku murru põhiomadus — 60
3.5.3. Hariliku murru laiendamine — 61
3.5.4. Hariliku murru taandamine — 61
3.5.5. Harilike murdude võrdlemine — 62
3.5.6. Harilike murdude liitmine ja lahutamine — 63
3.5.7. Harilike murdude korrutamine ja jagamine — 65

3.6. Ratsionaalarvud — 67
3.6.1. Ratsionaalarvu mõiste — 67
3.6.2. Harilike murdude seos kümnendmurdudega — 68
3.6.3. Kümnendmurru ümardamine. Hariliku murru kümnendlähend — 69
3.6.4. Tehted harilike ja kümnendmurdudega — 70
3.6.5. Aritmeetiline keskmine — 71
3.6.6. Ratsionaalarvude hulga omadusi — 71

3.7. Protsendid — 72
3.7.1. Protsendi mõiste — 72
3.7.2. Protsendi leidmine arvust — 73
3.7.3. Hulga protsentuaalne jaotus — 74
3.7.4. Arvu leidmine antud osa järgi — 75
3.7.5. Kahe arvu suhe — 76
3.7.6. Kahe arvu protsentsuhe — 76

3.7.7. Suuruse kasvamise ja kahanemise väljendamine protsentides — 77
3.7.8. Võrre. Võrdeline jaotamine — 78

3.8. Irratsionaalarvud. Reaalarvud — 79
3.8.1. Irratsionaalarvu mõiste — 79
3.8.2. Reaalarvud — 80
3.8.3. Reaalarvude hulga omadusi — 80

3.9. Arvutamine ligikaudsete arvudega — 81
3.9.1. Täpsed ja ligikaudsed arvud — 81
3.9.2. Absoluutse vea ülemmäär — 81
3.9.3. Relatiivse ehk suhtelise vea ülemmäär — 83
3.9.4. Arvu õiged numbrid — 83
3.9.5. Arvu tüvenumbrid ja standardkuju — 84
3.9.6. Summa ja vahe vea ülemmäär — 85
3.9.7. Korrutise ja jagatise vea ülemmäär — 86

3.10. Arvutuslükati — 89
3.101. Arvutuslükati ehitus — 89
3.10.2. Võrdekujulise võrrandi lahendamine lükati abil — 90
3.10.3. Jagamine lükatil — 92
3.10.4. Korrutamine lükatil — 93
3.10.5. Arvu ruudu leidmine lükatil — 94
3.10.6. Ruutjuure leidmine lükatil — 96
3.10.7. Kombineeritud tehteid lükatil — 97

3.11. Taskuarvuti — 102
3.11.1. Taskuarvuti arvutusvahendina — 102
3.11.2. Arvuti «Elektroonika БЗ-09 М» — 105
3.11.3. Mäluga taskuarvutid — 110
3.11.4. Arvuti «Elektroonika БЗ-18А» — 111

4. Üksliige ja hulkliige. Algebraline murd — 124

4.1. Algebraline avaldis, selle arvuline väärtus — 124
4.2. Naturaalarvulise astendajaga aste. Tehted astmetega — 125
4.3. Negatiivse astendajaga aste — 127
4.4. Juur. Tehted juurtega — 127
4.5. Murrulise astendajaga aste — 130
4.6. Üksliige ja hulkliige — 132
4.7. Sarnased üksliikmed, nende koondamine — 132
4.8. Tehted üksliikmetega. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine — 132
4.9. Hulkliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega — 133
4.10. Hulkliikmete korrutamine ja jagamine — 134
4.11. Korrutamise abivalemid — 135
4.12. Hulkliikme lahutamine teguriteks — 136
4.13. Algebraline murd, selle põhiomadus — 138
4.14. Tehted algebraliste murdudega — 140

4.15. Juuravaldiste teisendamine — 145
4.15.1. Erinevate juurijatega juurte korrutamine ja jagamine — 145
4.15.2. Juuravaldiste koondamine — 145
4.15.3. Murru nimetaja vabastamine irratsionaalsusest — 147
4.15.4. Avaldiste väärtuse arvutamise näiteid — 148
4.15.5. Keerukamaid juuravaldiste teisendusi — 148

5. Võrrand ja võrrandisüsteem — 152

5.1. Võrdus, võrduse omadusi — 152
5.2. Võrrand. Samasus — 153
5.3. Samaväärsed võrrandid, võrrandi omadused — 154
5.4. Ühe muutujaga lineaarvõrrand — 155
5.5. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem — 157
5.6. Ruutkolmliige. Ruutvõrrand, selle lahendamine. Biruutvõrrand — 161
5.7. Ruutvõrrandi lahendite omadused. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks — 164
5.8. Teise astme võrrandisüsteemid — 165
5.9. Murdvõrrandid — 169
5.10. Absoluutväärtusega võrrandid — 172
5.11. Parameetreid sisaldavad võrrandid — 173
5.12. Tekstülesannete lahendamise näiteid — 174

6. Võrratus — 179

6.1. Võrratus, võrratuse omadused — 179
6.2. Ühe muutujaga lineaarvõrratus — 180
6.3. Ühe muutujaga lineaarvõrratusesüsteem — 181
6.4. Ruutvõrratused — 184
6.5. Murdvõrratused — 187

7. Lihtsamaid funktsioone — 189

7.1. Punkti koordinaadid tasandil — 189
7.2. Funktsionaalne seos — 190
7.3. Funktsiooni esitusviisid — 191
7.4. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine — 194
7.5. Funktsioon $y=ax$ (võrdeline seos) — 195
7.6. Funktsioon $y=ax+b$ (lineaarne seos) — 196
7.7. Funktsioon $y=\frac{a}{x}$ (pöördvõrdeline seos) — 198
7.8. Funktsioon $y=ax^2+bx+c$ = 200
7.9. Joone võrrand — 204
7.10. Võrrandi lahendamine graafiku abil — 208
7.11. Võrrandisüsteemi lahendamine graafiku abil — 211
7.12. Võrratuse lahendamine graafiku abil — 216
7.13. Trigonomeetrilised funktsioonid, nende rakendusi — 221
7.14. Positiivsed ja negatiivsed nurgad — 225
7.15. Taandamisvalemid — 225

7.16. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste vahelised seosed — 226
7.17. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud, funktsioonide väärtuste muutumine — 228
7.18. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide rakendusi — 231
7.19. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine — 233

8. Vektorid — 237

8.1. Vektori mõiste — 237
8.2. Vektorite summa ja vahe — 239
8.3. Arvu ja vektori korrutis — 241
8.4. Vektori koordinaadid — 243
8.5. Vektori pikkus — 245
8.6. Tehted koordinaatides esitatud vektoritega — 246
8.7. Vektori avaldamine kahe mitteparalleelse vektori kaudu — 247
8.8. Vektorite kasutamise näiteid tõestamisel — 248
8.9. Kahe vektori skalaarkorrutis ja selle omadusi — 250

9. Tasandilised kujundid, nende omadused ja seosed — 252

9.1. Lõik. Kiir. Sirge. Tasand — 252
9.1.1. Lõik. Lõikude võrdlemine — 252
9.1.2. Lõikude summa ja vahe — 252
9.1.3. Lõigu jaotamine osadeks — 253
9.1.4. Lõigu korrutamine arvuga — 254
9.1.5. Kiir. Sirge. Tasand — 255

9.2. Nurk — 255
9.2.1. Nurga mõiste — 255
9.2.2. Nurkade võrdlemine — 256
9.2.3. Nurkade liigid — 257
9.2.4. Nurga suuruse mõõtmine malli abil — 259
9.2.5. Nurkade summa ja vahe — 260
9.2.6. Kõrvunurgad ja tippnurgad — 261

9.3. Sirged tasandil — 263
9.3.1. Sirge — 263
9.3.2. Sirgete lõikumine ja paralleelsus — 263
9.3.3. Vastavalt paralleelsete ja ristuvate haaradega nurgad — 265
9.3.4. Nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel sirgega — 267
9.3.5. Kahe sirge paralleelsuse tunnused — 267
9.3.6. Riba — 269
9.3.7. Lõikuvate sirgete paari sümmeetriatelg. Nurgapoolitaja — 271

9.4. Kolmnurk — 272
9.4.1. Murdjoon — 272
9.4.2. Kolmnurk, tema elemendid — 273
9.4.3. Kolmnurkade liigitamine — 275

9.4.4. Kolmnurga ümbermõõt ja pindala — 277
9.4.5. Kolmnurga sisenurk ja välisnurk — 278
9.4.6. Lõigud kolmnurgas — 279
9.4.7. Kolmnurga siseringjoon ja ümberringjoon — 281
9.4.8. Kolmnurkade kongruentsus — 282
9.4.9. Kolmnurga joonestamine — 284
9.4.10. Lõikude suhe, võrre — 286
9.4.11. Kolmnurkade sarnasus — 287
9.4.12. Kolmnurga sisenurga ja välisnurga poolitaja omadus — 289
9.4.13. Meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas — 289
9.4.14. Geomeetrilise keskmise konstruktsioon — 293

9.5. Rööpkülik — 294

9.5.1. Rööpkülik — 294
9.5.2. Rööpküliku omadused — 295
9.5.3. Rööpküliku tunnused — 296
9.5.4. Rööpküliku ümbermõõt ja pindala — 296
9.5.5. Rööpküliku joonestamine — 296

9.6. Ristkülik — 297

9.6.1. Ristkülik, ristküliku omadusi — 297
9.6.2. Ristküliku ümbermõõt ja pindala — 298
9.6.3. Ristküliku konstrueerimine — 298

9.7. Romb — 299

9.7.1. Romb, rombi omadusi — 299
9.7.2. Rombi ümbermõõt ja pindala — 299

9.8. Ruut — 300

9.8.1. Ruut, ruudu omadusi — 300
9.8.2. Ruudu ümbermõõt ja pindala — 300

9.9. Trapets — 301

9.9.1. Trapets, trapetsite liigitamine — 301
9.9.2. Trapetsi ümbermõõt ja pindala — 302

9.10. Ringjoon ja ring — 303

9.10.1. Ringjoon. Ring — 303
9.10.2. Seos ringjoone kaarte, kesknurkade ja kõõlude vahel — 304
9.10.3. Piirdenurk — 306
9.10.4. Sirge ja ringjoone vastastikune asend — 308
9.10.5. Puutuja konstrueerimine — 308
9.10.6. Ringjoone puutuja, lõikaja ja nurga vaheline seos — 309
9.10.7. Võrdelised lõigud ringis — 310
9.10.8. Kahe ringjoone vastastikune asend — 311
9.10.9. Ringjoone pikkus ja ringi pindala — 312

9.11. Hulknurk — 312

9.11.1. Hulknurk — 312
9.11.2. Hulknurga nurgad — 314

9.11.3. Kõõlhulknurk ja puutujahulknurk — 314
9.11.4. Võrdkülgne kõõlhulknurk — 315
9.11.5. Korrapärane hulknurk — 316
9.11.6. Hulknurga ümbermõõt ja pindala — 318
9.11.7. Hulknurkade sarnasus — 319

9.12. Homoteetsusteisendus — 320

9.12.1. Homoteetsuse mõiste — 320
9.12.2. Homoteetsete kujundite omadusi — 321

10. Tasandi teisendus — 324

10.1. Kujundi lüke — 324
10.2. Tasandi lüke — 325
10.3. Tasandi pööre ümber punkti — 325
10.4. Tasandi peegeldus punktist — 327
10.5. Tasandi peegeldus sirgest — 328
10.6. Tasandi liikumine — 329

11. Ruumilised kujundid, nende omadused ja seosed — 330

11.1. Hulktahukad — 330
11.2. Prisma. Prisma pindala ja ruumala — 331
11.3. Püströöptahukas. Püströöptahuka pindala ja ruumala — 335
11.4. Risttahukas. Risttahuka pindala ja ruumala — 339
11.5. Kuup. Kuubi pindala ja ruumala — 342
11.6. Püramiid. Püramiidi pindala ja ruumala — 344

12. Tabelid — 349

12.1. Ruudud — 349
12.2. Ruutjuured — 353
12.3. Trigonomeetrilised funktsioonid — 359
Sisunäitaja — 362

AUTORITELT.

Matemaatikaoskuse aluseks on põhivara hea tundmine. Siia kuuluvad vastavas kooliastmes õpitud tehete sooritamise eeskirjad ja seadused, mõisted, laused, reeglid, valemid. Kõik need omandatakse õppides ja harjutades. Põhivaraga on vahetult seotud uute teadmiste, oskuste ja vilumuste omandamise kergus ning mõtlemisoskuse arenemine. Hea mõtlemisoskus on mitmesuguste ülesannete lahenduskäigu otsimise ja leidmise tingimus.

Raamat on kirjutatud põhiliselt IV—VIII klassi õpilastele nooremates klassides õpitu meeldetuletamiseks ja kordamiseks. Siia on koondatud vastava kooliastme põhivara ja ülesannete lahendamise näited. Neid saab kasutada eeskujuna ülesannete iseseisval lahendamisel ja töös õpikuga.

Kuna raamat on mõeldud kordamiseks, mitte matemaatikakursuse süstemaatiliseks õppimiseks, sisaldab ta fakte ilma põhjenduste ja tõestusteta.

Vajaliku mõiste leiab kasutaja kiiresti sisunäitaja abil. See viitab leheküljele, kus mõiste esineb. Raamatu kasutamist kergendab ka üksikasjalik sisukord.

1. MÕISTEID HULGATEOORIAST.

1.1. HULK JA SELLE ELEMENT.

Sageli ühendame teatud esemeid, mõisteid, nähtusi, arve, kujundeid jne. nende ühiste omaduste või sarnasuse põhjal *hulkadeks*. Neid esemeid, mõisteid, nähtusi, kujundeid või arve, mis moodustavad hulga; nimetatakse *hulga elementideks*. Hulk on hulgateooria algmõiste, mida ei defineerita, vaid mille juurde jõutakse näidete varal.

N ä i t e d.

1. Õpilaste hulk 5. klassis. Iga õpilane on selle hulga üheks elemendiks.
2. Tähtede hulk sõnas *raamat*. Hulga elementideks on siin tähed *r, a, m* ja *t*.
3. Ühekohaliste paarisarvude hulk. Selle hulga elementideks on 2, 4, 6 ja 8.
4. Naturaalarvude hulk. Siin on elementideks arvud 0, 1, 2, 3, 4 jne.
5. Ringjoone punktide hulk. Selle hulga elementideks on ringjoone mistahes punktid.
6. Kolmnurga ABC nurkade hulk. Selle hulga elementideks on kolmnurga nurgad α, β ja γ.
7. Võrrandi $3+x=6$ lahendite hulk. Selle hulga elemendiks on arv 3.
8. 1. klassis õppivate kommunistlike noorte hulk. Selles hulgas pole ühtki elementi.

1.2. HULKADE TÄHISTAMINE JA ESITUSVIISID.

Hulki tähistatakse suurte tähtedega *A, B, C, K, L, X, Y* jne., elemente väikeste tähtedega *a, b, c,* . . . .

Hulkade esitamiseks on kaks võimalust: loetelu või eeskirja kaudu.

Kui hulga kõik elemendid on otseselt antud, siis ütleme, et hulk on esitatud loetelu kaudu. Sel juhul asetatakse elementide loetelu looksulgudesse.

Näited.

1. Esitame sõna *raamat* tähtede hulga M loetelu kaudu:
   $M=\{r; a; m; t\}$.
2. Esitame aastaaegade hulga A loetelu kaudu:
   $A=\{kevad, suvi, sügis, talv\}$.
3. Esitame ühekohaliste naturaalarvude ruutude hulga D loetelu kaudu:
   $D=\{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

Kui hulga elementide leidmiseks on antud eeskiri, siis ütleme, et *hulk on esitatud eeskirja või tunnuse kaudu.*

Sel juhul märgitakse looksulgudesse hulga elemendi üldtähis ja selle järele püstkriipsu taha eeskiri või tunnus, mis on antud hulga igal elemendil (ja mida ühelgi sellesse hulka mittekuuluval elemendil ei ole).

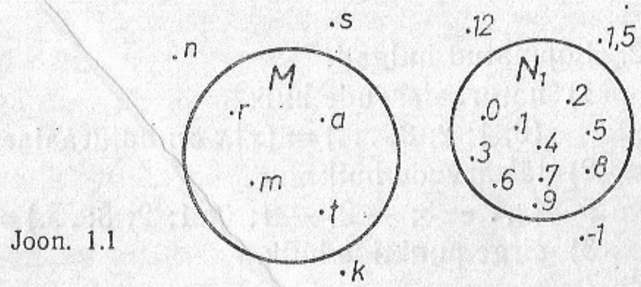
Näited.

1. Kõigi ühekohaliste naturaalarvude hulga N_1 saame kirjutada järgmiselt: $N_1=\{n|n$ on ühekohaline naturaalarv$\}$.
2. Sõna *raamat* tähtede hulga saame kirjutada järgmiselt: $M=\{x|x$ on täht sõnas *raamat*$\}$.
3. Arvust 6 väiksemate naturaalarvude hulga saame kirjutada järgmiselt: $\{x|x<6$ ja x on naturaalarv$\}$.

1.3. HULKADE SKEMAATILINE ESITAMINE. ELEMENDI KUULUVUS HULKA.

Hulkadest parema ettekujutuse saamiseks kujutatakse neid skemaatiliselt kinnise joone abil, mis piirab vaadeldava hulga elementidele vastavaid punkte.

Kui kujutada mõnda elementi, mis ei kuulu antud hulka, siis tuleb ta märkida väljaspoole kinnist joont.



Joon. 1.1

Näited.

Esitame jaotuses 1.2. toodud hulgad M ja N_1 skemaatiliselt (joon. 1.1.). Joonistel on esitatud ka mõned elemendid, mis ei kuulu vastavasse hulka.

Elemendi kuuluvust antud hulka märgitakse sümboliga $\in$ (kuulub) ja mittekuuluvust sümboliga $\notin$ (ei kuulu).

Näited.

Joonisel 1.1. $r\in M$; $a\in M$, kuid $n\notin M$ ja $s\notin M$; $2\in N_1$; $5\in N_1$ kuid $-1\notin N_1$ ja $1{,}5\notin N_1$.

Kirjutust $r\in M$ loetakse *r kuulub hulka M* ehk *r on hulga M element.*

Kirjutust $1{,}5\notin N_1$ loetakse *1,5 ei kuulu hulka* N_1 ehk *1,5 ei ole hulga* N_1 *element.*

1.4. LÕPLIK JA LÕPMATA HULK. TÜHIHULK. HULKADE VÕRDSUS.

Kui hulka kuuluvate elementide arv on lõplik, siis nimetatakse hulka *lõplikuks*. Lõpmatu arvu elementidega hulk on *lõpmatu* hulk. Hulka, milles pole ühtegi elementi, nimetatakse *tühihulgaks*. Tühihulga sümbol on $\varnothing$.

Näited.

1. Lõplikud hulgad:
   1) arvust 6 väiksemate naturaalarvude hulk
      $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}=\{x|x<6\wedge x$ on naturaalarv$\}$;
   2) sõna *raamat* tähtede hulk
      $\{r; a; m; t\}=\{x|x$ on täht sõnas *raamat*$\}$;
   3) meie kooli õpilaste hulk.

2. Lõpmatud hulgad:
   1) naturaalarvude hulk
   $\{0; 1; 2; 3; \ldots\} = \{x \mid x \text{ on naturaalarv}\}$;
   2) täisarvude hulk
   $\{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\} = \{x \mid x \text{ on täisarv}\}$;
   3) sirge punktide hulk.
3. Tühihulk:
   1) võrrandi $x+1=x$ lahendite hulk
   $\{x \mid x+1=x\} = \varnothing$;
   2) paralleelsete sirgete lõikepunktide hulk
   $\{x \mid x$ on paralleelsete sirgete lõikepunkt$\} = \varnothing$;
   3) 200 aasta vanuste inimeste hulk
   $\{x \mid x$ on 200 aasta vanune inimene$\} = \varnothing$.

Hulkade võrdsus.

Ühtedest ja samadest elementidest koosnevaid hulki nimetatakse võrdseteks.

Hulkade võrdsuse tähistamiseks kasutatakse sümbolit $=$. Võrdsetes hulkades võivad elemendid esineda erinevas järjestuses või olla esitatud erineval viisil.

Kui kahe hulga A ja B kohta teame, et $A \subset B$ ning $B \subset A$, siis $A=B$ (vt. jaot. 1.5. osahulga mõiste).

Näited.

1. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\} = \{x \mid x<6 \wedge x$ on naturaalarv$\}$.
2. $\{a; b; c; d\} = \{a; d; c; b\}$.
3. $\{x \mid x-10=6\} = \{16\}$.

1.5. OSAHULK.

Kui ühe hulga iga element kuulub teise hulka, siis nimetatakse esimest hulka teise hulga osahulgaks.

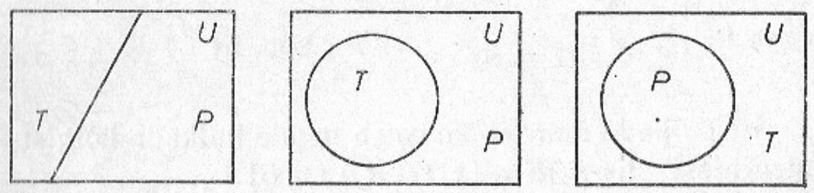
Näide.

Vaatleme kahe hulga $A=\{3; 5; 8\}$ ja $B=\{2; 3; 4; 5; 8\}$ elemente. Et hulga A iga element kuulub ka hulka B, siis hulk A on hulga B osahulk. Seda kirjutatakse lühidalt nii: $A \subset B$. Seega sümbol $\subset$ väljendab hulkadevahelist seost *on osahulk.*

Kirjutust $A \subset B$ võib lugeda ka teisiti *hulk A sisaldub hulgas B* või *hulk B sisaldab hulka A.*

Vaatleme kahe hulga $E=\{0; 2; 4\}$ ja $D=\{0; 1; 2; 3\}$ elemente. Et hulga E element 4 ei kuulu hulka D, siis hulk E ei ole hulga D osahulk. Seda kirjutatakse lühidalt nii: $E \not\subset D$. Seega sümbol $\not\subset$ väljendab hulkadevahelist seost *ei ole osahulk.* Kirjutust $E \not\subset D$ võib lugeda ka teisiti *hulk E ei sisaldu hulgas D.*

Klassi õpilaste hulk on U, poiste hulk P ja tütarlaste hulk T. Seega $P \subset U$ ja $T \subset U$. Kujutame hulga U skemaatiliselt ristkülikuna; siis hulki P ja T võib kujutada mitmeti (joon. 1.2).



Joon. 1.2

Tühihulk loetakse kuuluvaks igasse hulka.

Näide.

$\varnothing \subset \{0; 1; 5\}$; $\varnothing \subset \{x \mid x$ on paarisarv$\}$; $\varnothing \subset \{1\}$.

Iga hulk on iseenda osahulk.

Näide.

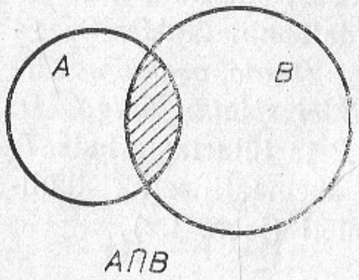
$A \subset A$; $\{2; 4; 6; 8\} \subset \{2; 4; 6; 8\}$.

1.6. HULKADE ÜHISOSA.

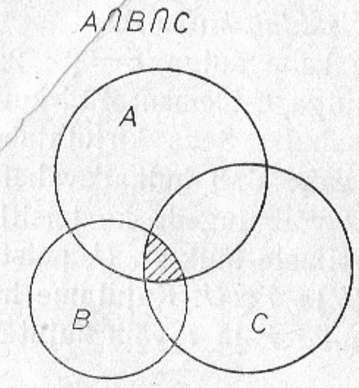
Kahe hulga kõigi ühiste elementide hulka nimetatakse nende hulkade ühisosaks.

Hulkade ühisosa tähistatakse sümboliga $\cap$. Lauset *hulk C on hulkade A ja B ühisosa* kirjutatakse nii: $C=A \cap B$. Joonisel 1.3 on hulkade A ja B ühisosa viirutatud.

Hulkade A ja B ühisosa koosneb elementidest, mis kuuluvad hulka A ja hulka B. Kui näiteks e on hulkade A ja B ühine element, siis kirjutatakse: $e \in A \wedge e \in B$ (loe: *element e kuulub hulka A ja element e kuulub hulka B*). Sümbol $\wedge$ tähendab sidesõna *ja.*



Joon. 1.3



Joon. 1.4

Et hulkade ühisosa koosneb nende hulkade kõigist ühistest elementidest, siis $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Näide.

$A = \{n \mid n \geqslant 3\}$;
$B = \{n \mid n < 5\}$; $A \cap B = \{n \mid n \geqslant 3 \wedge n < 5\} = \{3; 4\}$.

Viimast hulka määravad tingimused saab kirjutada ka võrratuste ahelana:

$A \cap B = \{n \mid 3 \leqslant n < 5\}$.

Kahe hulga ühisosaks võib olla üks vaadeldavaist hulkadest. Ühisosa võib koosneda ka ainult ühest elemendist või olla tühi.

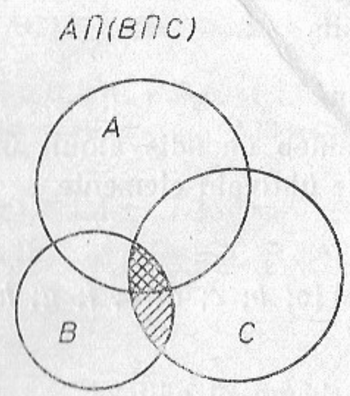
Näited.

1. $\{a; b; c; d\} \cap \{b; d\} = \{b; d\}$.
   $\{a; b; c\} \cap \{c; d; e\} = \{c\}$.
   $\{a; b; c\} \cap \{d; e; f\} = \emptyset$.
2. Ühisosa võime leida ka enam kui kahele hulgale (joon. 1.4.).

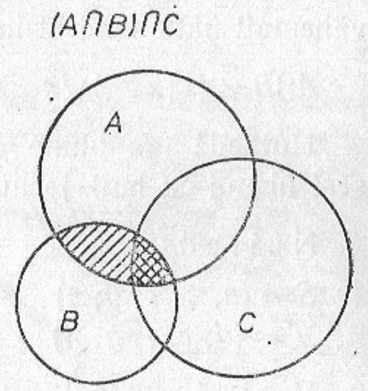
Leiame hulkade A, B ja C ühisosa.
Kui $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 9\}$, $B = \{3; 4; 5\}$ ja $C = \{4; 5; 6\}$, siis $A \cap B \cap C = \{4; 5\}$.

Hulkade ühisosa moodustamisel kehtivad järgmised omadused.

1. $A \cap B = B \cap A$ (vahetuvus ehk kommutatiivsus).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ühenduvus ehk assotsiatiivsus) (joon. 1.5 ja 1.6).



Joon. 1.5



Joon. 1.6

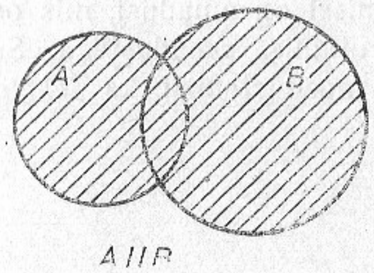
3. $A \cap B \subset A$ ja $A \cap B \subset B$.
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. Kui $B \subset A$, siis $A \cap B = B$; kui $A \subset B$, siis $A \cap B = A$.
6. $A \cap A = A$.

1.7. HULKADE ÜHEND.

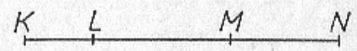
Kõigi elementide hulka, mis kuuluvad vähemalt ühte kahest hulgast, nimetatakse nende hulkade ühendiks.

Ühendit tähistatakse sümboliga $\cup$. Lauset *hulk C on hulkade A ja B ühend* kirjutatakse nii $C = A \cup B$. Joonisel 1.7 on hulkade A ja B ühend viirutatud.

Kui element e kuulub vähemalt ühte hulkadest A ja B, siis kirjutatakse: $e \in A \vee e \in B$ (loe: *element e kuulub hulka A või element e kuulub hulka B*). Sümbol $\vee$ tähendab sidesõna *või*.



Joon. 1.7



Joon. 1.8

Et hulkade ühend koosneb kõigist elementidest, mis kuuluvad vähemalt ühte nendest hulkadest, siis

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Hulkade iga ühine element esineb ühendis ainult üks kord, sest ühend on hulk ja hulgas ei ole ühtivaid elemente.

Näited.

1. $S = \{a; b; c; d; e\}$ $\quad S \cup T = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$
   $T = \{d; e; f; g; h\}$
2. Vaadeldes lõike joonisel 1.8 märkame, et näiteks
   $[KL] \cup [LN] = [KN]$
   $[KM] \cup [LN] = [KN]$
3. Võime leida ka enam kui kahe hulga ühendi. Leiame hulkade A, B ja C ühendi, kui $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 9\}$, $B = \{3; 4; 5\}$ ja $C = \{4; 5; 6; 7\}$. Siis $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$.

Hulkade ühendi moodustamisel kehtivad järgmised omadused.

1. $A \cup B = B \cup A$ (vahetuvus ehk kommutatiivsus).
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ühenduvus ehk assotsiatiivsus).
3. $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.
4. $A \cup \emptyset = A$.
5. Kui $B \subset A$, siis $A \cup B = A$; kui $A \subset B$, siis $A \cup B = B$.
6. $A \cup A = A$.

Ühendi ja ühisosa moodustamisel kehtib ka jaotuvuse ehk distributiivsuse omadus.

Kui on antud hulgad A, B ja C, siis

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

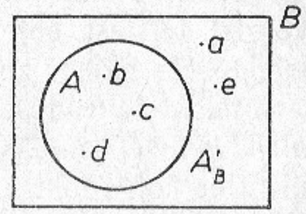
Ühendi ja ühisosa moodustamisel on omadusi, mis on sarnalaadsed arvude liitmise ja korrutamise omadustega. Seepärast nimetatakse ühendi ja ühisosa moodustamist ka *teheteks hulkadega.*

1.8. HULGA TÄIEND.

Kui $A \subset B$, siis hulga A täiendiks hulgani B nimetatakse hulka, mille elementideks on hulga B need elemendid, mis ei kuulu hulka A.

Hulga A täiendit hulgani B tähistatakse sümboliga A'_B:

$$A'_B = \{x \mid x \notin A \wedge x \in B;\ A \subset B\}.$$



Joon. 1.9

Näide. $A = \{b; c; d\}$ ja $B = \{a; b; c; d; e\}$; siis
$A \subset B$ ja $A'_B = \{a; e\}$ (joon. 1.9).
Kui $A = B$, siis $A'_B = B'_A = \emptyset$.

2. MÕISTEID LOOGIKAST.

2.1. MÕISTE DEFINITSIOON. ALGMÕISTED JA TULETATUD MÕISTED.

Mõiste kujunemisel eraldatakse mingid samalaadsed objektid kõigist teistest objektidest ja ühendatakse nad hulgaks. Seega moodustub mõiste kujunemisel teatav hulk.

Mõiste tähenduse selgitamiseks peab teda kirjeldama. *Mõiste kirjeldamisel* antakse teada mõistena kokkuvõetava hulga elementide kõige tähtsamad ühised omadused.

Mõiste kirjeldust nimetatakse definitsiooniks, kui selles sisalduvate andmete põhjal saab iga objekti kohta otsustada, kas ta kuulub mõistega kokkuvõetavasse hulka või ei kuulu.

Defineerimisel eraldatakse mõistega kokkuvõetav hulk osahulgana mingist üldisemast hulgast, mida on eelnevalt tundma õpitud. Osahulga väljaeraldamiseks kasutatakse selle elementide ühist omadust, mida ei ole üldisema hulga ülejäänud elementidel. Seda omadust nimetatakse *mõiste tunnuseks.*

Iga definitsioon peab rahuldama viit tingimust.

1. Definitsioon peab sisaldama moodustatava hulga elemendi nimetust.
2. Definitsioon peab sisaldama sõna nimetatakse.
3. Definitsioon peab sisaldama kasutatud üldisema hulga elemendi nimetust.
4. Mõiste tunnuses peab olema küllalt palju andmeid selleks, et moodustatavasse hulka ei satu liigseid elemente. Seepärast öeldakse ka, et mõiste tunnus peab olema piisav.
5. Mõiste tunnuses ei tohi olla andmeid, mis järelduvad teistest selles tunnuses esitatud andmetest. Seepärast öeldakse, et mõiste tunnus peab olema tarvilik.

Kui mõni nendest tingimustest ei ole täidetud, siis ütleme, et definitsioon ei ole korrektne.

Defineerimata mõisteid, mis on aluseks kõigi ülejäänud mõistete defineerimisel, nimetatakse algmõisteteks.

Mõisteid, mis defineeritakse algmõiste ja teiste, juba defineeritud mõistete kaudu, nimetatakse tuletatud mõisteteks.

2.2. TEOREEM JA SELLE TÕESTUS. AKSIOOM.

Matemaatilistest lausetest saab järeldada uusi lauseid. Järelduvusseost kasutatakse matemaatikas väga paljudel juhtudel. Järelduvusseost märgime sümboliga $\Rightarrow$. Kui kaks lauset on seotud sümboliga $\Rightarrow$, siis loeme: «*Sellest, et* ... (sõnastuse esimene lause) *järeldub, et* ...» (sõnastuse teine lause). Võib öelda ka esimese lause ette sõna «kui» ja teise lause ette sõna «siis».

Lauset, mis arutlemise teel järeldub tõestest lausetest ja definitsioonidest, nimetatakse *teoreemiks.*

Arutlust, mille abil näidatakse, et teoreem järeldub eelnevalt tundma õpitud lausetest, nimetatakse *teoreemi tõestuseks.*

Vähemtähtsaid teoreeme, mille tõestus on lihtne, nimetatakse *järeldusteks.*

Lauseid, mis järelduvad teineteisest, nimetatakse *samaväärseteks lauseteks.* Samaväärsust märgitakse sümboliga $\Leftrightarrow$.

Lauseid, mida loetakse tõesteks tõestamata, nimetatakse aksioomideks.

Sageli räägime teooriast. Teooria on teadmiste loogiline süsteem.

Lausete liigitus aksioomideks ja teoreemideks on suhteline: ühes teoorias võib mingi lause olla aksioomiks, teises samal ajal teoreemiks.

2.3. PÖÖRDTEOREEM JA VASTANDTEOREEM.

Iga teoreemi saab esitada kahest osast koosneva liitlausena nii, et üks osa algab sõnaga «kui» ja teine osa sõnaga «siis» (jaot. 2.5.).

Teoreemi seda osa, mis algab sõnaga «kui», nimetatakse *teoreemi eelduseks*, sõnaga «siis» algavat osa *teoreemi väiteks.*

Eeldus ütleb, mis on antud või teada. Väide ütleb, mis järeldub eeldusest.

Olgu mingi teoreemi eeldus p ja teoreemi väide q. Siis teoreemi üldkuju on

$p \Rightarrow q$.

Lauset, mis saadakse eelduse ja väite vahetamisega antud lauses, nimetatakse selle lause *pöördlauseks*. Järelikult võime pöördlause kirjutada järgmiselt:

$q \Rightarrow p$.

Lauset, mis saadakse antud lause eeldust ja väidet eitades, nimetatakse selle lause *vastandlauseks*. Lausete p ja q eitusi tähistatakse $\bar{p}$ ja $\bar{q}$:

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$.

N ä i t e d.

Võrdleme nelja lauset.

(1) Kui nelinurk on romb, siis tema diagonaalid on risti. Olgu selle teoreemi eeldus p ja väide q. Üldkujul võime selle teoreemi kirjutada $p \Rightarrow q$.

(2) Kui nelinurga diagonaalid on risti, siis ta on romb. Selle teoreemi võime üldkujul kirjutada $q \Rightarrow p$.

(3) Kui nelinurk ei ole romb, siis tema diagonaalid ei ole risti. Selle teoreemi võime üldkujul kirjutada $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$.

(4) Kui nelinurga diagonaalid ei ole risti, siis ta ei ole romb.

Selle teoreemi võime üldkujul kirjutada $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Laused (1) ja (2) ning (3) ja (4) on saadud teineteisest eelduse ja väite vahetamisega. Järelikult on tegemist pöördlausete paaridega.

Laused (1) ja (3), samuti (2) ja (4); on saadud teineteisest eelduse ja väite eitamisega. Järelikult on tegemist vastandlausete paaridega.

Teoreemi pöördlause võib olla kas tõene või väär.

Teineteise pöördlaused on sõltumatud laused: kumbki ei järeldu teisest.

Pöördlauseid, mis on mõlemad tõesed, nimetatakse teineteise pöördteoreemideks.

Teoreemi vastandlause võib olla kas tõene või väär. Teineteise vastandlaused on sõltumatud laused.

Vastandlauseid, mis on mõlemad tõesed, nimetatakse teineteise vastandteoreemideks.

Kui üks lause saadakse teisest eelduse ja väite vahetamise ning eitamisega, siis selliseid lauseid nimetatakse teineteise pöördvastandlauseteks.

Pöördvastandlaused on kas mõlemad tõesed või mõlemad väärad. Seega nad on samaväärsed laused.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$

Et pöördlaused on teineteisest sõltumatud, siis on tarvis mõlemat tõestada. Samuti on tarvis tõestada mõlemat vastandlauset. Kuid pöördvastandlausetest on tarvis tõestada vaid üht.

Mõnel juhul on teoreemi tõestamise asemel lihtsam tõestada tema pöördvastandteoreemi.

Pöördvastandteoreemi tõestust nimetatakse teoreemi *vastuväiteliseks tõestuseks*.

2.4. TARVILIK JA PIISAV TINGIMUS.

Kui teoreemi $p \Rightarrow q$ eeldus p on tõene, siis on tõene ka teoreemi väide q. Sellepärast öeldakse, et teoreemi eeldus on *piisav tingimus* selleks, et teoreemi väide on tõene.

Kui teoreemil on pöördteoreem, siis selleks, et teoreemi väide oleks tõene, on tarvis, et eeldus on tõene.

Teoreemi eeldus on *tarvilik tingimus* selleks, et teoreemi väide on tõene.

Iga teoreemi $p \Rightarrow q$ eeldus p on *piisav tingimus* selleks, et teoreemi väide q on tõene. Kui ka teoreemi pöördlause $q \Rightarrow p$ on tõene, siis on teoreemi $p \Rightarrow q$ eeldus p ühtlasi *tarvilik tingimus* selleks, et teoreemi väide on tõene. Järelikult alati, kui teoreemil on pöördteoreem, on teoreemi eeldus *tarvilik ja piisav tingimus* selleks, et teoreemi väide on tõene.

Näide.

Teoreem. Kui nelinurga diagonaalid poolitavad tema nurki, siis nelinurk on romb.

Pöördteoreem. Kui nelinurk on romb, siis tema diagonaalid poolitavad tema nurki.

Kasutades sõnu «tarvilik» ja «piisav» saab teoreemi ja pöördteoreemi kokku võtta üheks lauseks.

Eelpool vaadeldud teoreemi ja selle pöördteoreemi saame kokku võtta järgmiselt.

Selleks et nelinurk oleks romb, on tarvilik ja piisav, et tema diagonaalid poolitavad tema nurki.

Sõnad «tarvilik» ja «piisav» asendatakse sageli sõnadega «siis ja ainult siis».

Eelpool toodud kokkuvõetud teoreemi võime sõnastada ka nii:

Nelinurk on romb siis ja ainult siis, kui tema diagonaalid poolitavad tema nurki.

3. ARVU MÕISTE LAIENDAMINE.

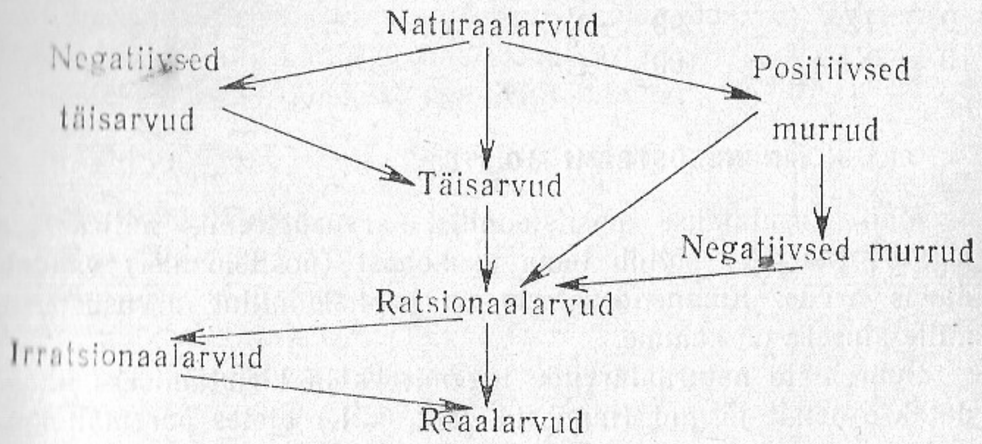
3.1. AJALOOLINE ÜLEVAADE.

3.1.1. ARVU MÕISTE.

Arv on matemaatika üks põhimõisteid, mis tekkis juba ürgajal. Hiljem seda laiendati ja üldistati. Seoses esemete loendamisega arenes naturaalarvu mõiste. Saadi aru, et naturaalarvude jada 0, 1, 2, 3, ... on lõpmatu. Pikkuste, ruumalade jms. mõõtmiseks ning esemete osadeks jaotamise ülesannete lahendamiseks oli vaja kasutusele võtta positiivne murd (kasutati muistses Egiptuses ja Süürias juba umbes 2000 a. e. m. a.). Vajadusest pikkusi täpselt arvudega väljendada ka sel juhul, kui mõõdetav lõik ja pikkusühik on ühismõõduta suurused (näit. ruudu diagonaal ja külg), loodi positiivse irratsionaalarvu mõiste (tuntud 5. sajandist e. m. a.).

Negatiivsed ja ratsionaalarvud võeti kasutusele lahutamis- ja jagamistehete sooritamiseks (v. a. jagamine nulliga). Reaalarvude korrektne teooria tekkis 19. saj. teisel poolel.

Arvu mõiste arengut võime iseloomustada järgmise skeemiga.



3.1.2. NUMBRI MÕISTE.

Number on arvu tähistav sümbol. Erisuguste numbritega tähistatakse positsioonilistes arvusüsteemides ainult süsteemi alusest väiksemaid arve (sealhulgas null), liitmisprintsiibil põhinevates arvusüsteemides (näiteks rooma numbrid) järguühikuid. Arvude märkimine sümbolitega on vanem kui kirjutamisoskus; vanimad arvumärgid olid kepile tõmmatud kriipsud, nöörisse tehtud sõlmed vms., mille hulk vastas vaadeldava objekti üksikelementide hulgale. Vanimad teadaolevad numbrisüsteemid olid babüloonlastel ja egiptlastel (II aastatuhandel e. m. a. ja 3000—2500 a. e. m. a.).

Praegu meil kasutusel olevad numbrid 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9, nn. araabia numbrid, on pärit Indiast (u. 5. saj. m. a. j.), kust araablased nad 10.—13. saj. Euroopasse tõid. Üldkasutatavaks muutusid need numbrid 15. sajandil.

Rooma numbrid tekkisid umbes 500 a. e. m. a.

Toome siin ära võrdlevalt kümnendsüsteemi ja rooma numbrite abil kirjutatud arvud.

1	I	15	XV	500	D
2	II	20	XX	1000	M
3	III	30	XXX		
4	IV	40	XL		
5	V	50	L		
6	VI	60	LX		
7	VII	70	LXX		
8	VIII	80	LXXX		
9	IX	90	XC		
10	X	100	C		

3.1.3. KÜMNENDSÜSTEEMI MÕISTE.

Meil kasutatakse positsioonilist arvusüsteemi, milles iga numbri tähendus sõltub tema asukohast (positsioonist) vaadeldavas arvus. Kümnendsüsteem on positsiooniline arvusüsteem, mille aluseks on kümme.

Suuremate naturaalarvude lugemiseks ja kirjutamiseks ühendatakse nende järgud (numbrid, jaot. 3.21.) alates paremalt kolmekaupa rühmadesse, mida nimetatakse *klassideks*.

Järguklasside tabel

Nr.	Klassi nimetus	Klassi kuuluvate järkude nimetus	Järguühik
1	ühed (lihtühikud)	ühelised kümnelised sajalised	1 10 100
2	tuhanded	ühetuhandelised kümnetuhandelised sajatuhandelised	1000 10 000 100 000
3	miljonid	ühemiljonilised kümnemiljonilised sajamiljonilised	1 000 000 10 000 000 100 000 000
4	miljardid (biljonid)	ühemiljardilised kümnemiljardilised sajamiljardilised	1 000 000 000 10 000 000 000 100 000 000 000

Kõrgemate numbrikohtade ühikute nimetusi, millel eri maadel on erisugune tähendus, praegu enam palju ei kasutata.

Kümnendsüsteemis märgitakse arve kümne numbri (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9) abil. Kümnendsüsteemi kasutatakse ka murdarvude (kümnendmurdude) juures (jaot. 3.3.1.).

Kümnendsüsteemis kirjutatud arvu (kümnendarvu) iga numbrikoht näitab, mitu korda kümne vastav aste sellesse arvu kuulub.

Näiteks 3096,27 tähendab tegelikult summat

$3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$, kus

$10^3 = 1000$ (tuhat);
$10^2 = 100$ (sada);
$10^1 = 10$ (kümme);
$10^0 = 1$ (üks);
$10^{-1} = 0{,}1$ (kümnendik);
$10^{-2} = 0{,}01$ (sajandik).

3.1.4. MEETERMÕÕDUSTIK. RAHVUSVAHELINE MÕÕTÜHIKUTE SÜSTEEM (SI).

Mõõtühik on mõõdetava suuruse kindel väärtus, millega seda suurust mõõtmisel võrreldakse.

Tänapäeval tugineb kümnendsüsteemile enamik mõõtühikute süsteeme. Vaatleme nendest kahte: *meetermõõdustikku* ja *rahvusvahelist mõõtühikute süsteemi* (lühend SI).

Meetermõõdustik on mõõtühikute süsteem, mille põhiühikud on pikkusühik meeter ja massiühik kilogramm ning milles kehtib ühikute kümnendkordsus, s. t. iga kümme ühikut moodustavad suuruselt järgneva ühiku. Ehk vastupidi: iga ühik jagatakse kümneks võrdseks osaks, saadakse üks kümnendik vaadeldavast ühikust, mis on temale eelnevaks väiksemaks ühikuks.

Suuremate ja väiksemate ühikute nimetused moodustatakse eesliidete abil.

Meetermõõdustikus ühikute kordust tähistavad eesliited.

Kordustegur	Eesliide	Tähis
$10^{-6}=0{,}000001$	mikro	μ
$10^{-3}=0{,}001$	milli	m
$10^{-2}=0{,}01$	senti	c
$10^{-1}=0{,}1$	detsi	d
10	deka	da
10^{2}	hekto	h
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M

Mõnede ühikute puhul kasutatakse erandlikult ka mittesüsteemseid nimetusi.

ENAMKASUTATAVAD ÜHIKUD.

Pikkusühikud.

Põhiühik on meeter (tähis m).

Põhiühikust väiksemad ühikud.

detsimeeter — 1 dm = 0,1 m
sentimeeter — 1 cm = 0,01 m
millimeeter — 1 mm = 0,001 m
mikromeeter — 1 μm = 0,000001 m (ehk mikron)

Põhiühikust suuremad ühikud.

dekameeter — dam = 10 m
hektomeeter — 1 hm = 100 m
kilomeeter — 1 km = 1000 m

Pindalaühikud.

Põhiühik on ruutmeeter (tähis m^2).

Põhiühikust väiksemad ühikud.

ruutdetsimeeter — 1 dm^2 = 0,01 m^2
ruutsentimeeter — 1 cm^2 = 0,0001 m
ruutmillimeeter — 1 mm^2 = 0,000001 m^2

Põhiühikust suuremad ühikud.

ruutdekameeter — 1 a = 100 m^2 (aar)
ruuthektomeeter — 1 ha = 10 000 m^2 (hektar)
ruutkilomeeter — 1 km^2 = 1 000 000 m^2

Ruumalaühikud.

Põhiühik on kuupmeeter (tähis m^3).

Põhiühikust väiksemad ühikud.

kuupdetsimeeter — 1 dm^3 = 0,001 m^3
kuupsentimeeter — 1 cm^3 = 0,000001 m^3
kuupmillimeeter — 1 mm^3 = 0,000000001 m^3

Põhiühikust suuremad ühikud.

kuupkilomeeter — 1 km^3 = 1 000 000 000 m^3

Mõningatel juhtudel võetakse põhiühikuks liiter (tähis l) — 1 l = 1 dm^3.

Põhiühikust väiksemad ühikud.

detsiliiter — 1 dl = 0,1 l
sentiliiter — 1 cl = 0,01 l
milliliiter — 1 ml = 0,001 l

Põhiühikust suuremad ühikud.

dekaliiter — 1 dal = 10 l
hektoliiter — 1 hl = 100 l
kiloliiter — 1 kl = 1000 l

Raskusühikud.

Põhiühikuks on gramm (tähis g).

Põhiühikust väiksemad ühikud.

detsigramm — 1 dg = 0,1 g
sentigramm — 1 cg = 0,01 g
milligramm — 1 mg = 0,001 g

Põhiühikust suuremad ühikud.

dekagramm — 1 dag = 10 g
hektogramm — 1 hg = 100 g
kilogramm — 1 kg = 1000 g
tsentner — 1 ts = 100 kg
tonn — 1 t = 1000 kg

Ajaühikud

Põhiühikuks on sekund (tähis s).

Põhiühikust suuremad ühikud.

minut — 1 min.=60 s.

tund — 1 t.=60 min.=3600 s.

Nurga mõõtühikud.

Põhiühikuks on nurgakraad (tähis °).

Põhiühikust väiksemad ühikud on nurgaminut (tähis ′) ja nurgasekund (tähis ″).

$1° = 60′ = 3600″$.

Kaare mõõtühikud.

Põhiühikuks on kaarekraad (tähis °). Põhiühikust väiksemad ühikud on kaareminut (tähis ′) ja kaaresekund (tähis ″).

$1° = 60′ = 3600″$.

Rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi (lüh. SI) põhiühikuteks on võetud pikkuse, massi, aja, elektrivoolu tugevuse, temperatuuri, valgustugevuse mõõtühikud ja ainehulk, mida defineeritakse rahvusvaheliste kokkulepete alusel.

Pikkuse mõõtühik	— meeter (m)
Massi mõõtühik	— kilogramm (kg)
Aja mõõtühik	— sekund (s)
Elektrivoolu tugevuse mõõtühik	— amper (A)
Temperatuuri mõõtühik	— Kelvini kraad (°K)
Valgustugevuse mõõtühik	— kandela (cd)
Ainehulk	— mool (mol)

SI-süsteem on universaalne, s. t. rakendatav kõigis teadus-, tehnika- ja majandusharudes.

3.2. NATURAALARVUD.

3.2.1. NATURAALARV. JÄRGUÜHIK. JÄRKARV.

Arvud 0, 1, 2, 3, ... on naturaalarvud. Naturaalarvude hulka tähistatakse tähega **N**.

Näiteks klassi õpilaste loendamisel saame naturaalarvu.

Arvu järguühikuiks nimetatakse arve 1, 10, 100, 1000, jne. Need arvud on loendamisel ühikuteks (üheline, kümneline, sajaline, tuhandeline jne.).

Järkarvudeks nimetatakse arve, mis kirjutatakse ainult ühe nullist erineva numbri abil. Näiteks 4, 30, 600, 5000 on järkarvud. Iga arvu võib esitada järkarvude summana.

Näited. $349 = 300 + 40 + 9$

$4127 = 4000 + 100 + 20 + 7$

$7058 = 7000 + 50 + 8$

Iga arvu saab kirjutada ka järguühikute korrsete summana.

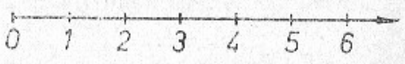
$258 = 200 + 50 + 8 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

$2030 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 1 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 10$

$6007 = 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 1$

3.2.2. SEOSEID NATURAALARVUDE VAHEL.

Naturaalarve saame kujutada arvkiirel (joon. 3.1). *Arvkiire* saamiseks joonestame kiire, mille alguspunkti juurde kirjutame arvu 0. Valime mingi pikkusühiku, näiteks 1 cm, ja märgime arvuga 1 arvkiire punkti, mis on alguspunktist ühe pikkusühiku kaugusel. Kahe ühiku kaugusel oleva punkti juurde märgime arvu 2 jne. Niiviisi saame arvkiire, millel naturaalarvud 0, 1, 2, 3, ... on kujutatud punktidena. Arvkiire joonestamisel valitud pikkusühikut nimetame *kujutamisühikuks*. Arvu 0 kujutist nimetame arvkiire nullpunktiks.

Joon. 3.1 

Iga kahe naturaalarvu n ja m korral kehtib üks järgmistest seostest.

On võrdne ehk *võrdub* kirjutatakse sümboli $=$ abil, näiteks $n = m$.

Ei ole võrdne ehk *ei võrdu* kirjutatakse sümboli $\neq$ abil, näiteks $n \neq m$.

On suurem kui kirjutatakse sümboli $>$ abil, näiteks $n>m$.

On väiksem kui kirjutatakse sümboli $<$ abil, näiteks $n<m$.

On võrdne või suurem kui kirjutatakse sümboli $\geqslant$ abil, näiteks $n\geqslant m$.

On võrdne või väiksem kui kirjutatakse sümboli $\leqslant$ abil, näiteks $n\leqslant m$.

3.2.3. NATURAALARVUDE HULGA PÕHIOMADUSI.

1. Igale naturaalarvule järgneb vahetult üks naturaalarv ja igale naturaalarvule, välja arvatud 0, eelneb vahetult üks naturaalarv. Arvule 0 ei eelne ühtki naturaalarvu.

2. Iga naturaalarv on 1 võrra suurem temale vahetult eelnevast naturaalarvust ja 1 võrra väiksem temale vahetult järgnevast naturaalarvust.

3. Naturaalarvude hulgas leidub kõige väiksem arv, milleks on arv 0, kuid ei leidu kõige suuremat arvu.

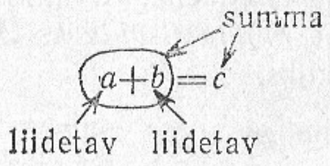
4. Naturaalarvude hulk on lõpmatu.

5. Naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes.

3.2.4. NATURAALARVUDE LIITMINE.

Üldkujulises võrduses $a+b=c$ on arvud a ja b *liidetavad*, arv c (ehk $a+b$) on *summa*.

Näide.



Mitmekohaliste arvude kirjalikul liitmisel kirjutame liidetavad üksteise alla nii, et nende ühenimelised järgud on kohakuti. Seejärel tõmbame liidetavatele joone alla ja liidame ühelistest alates arvude ühenimelised järgud. Saadud summa, kui ta ei ületa arvu 9, kirjutame joone alla vastava järgu kohale. Kui mingis järgus saadud summa ületab arvu 9, siis eraldame kõrgemat järku ühikud, mis liidame järgmiste järkude summale.

Näited.

1) $\begin{array}{r} 27\,324 \\ +\,52\,345 \\ \hline 79\,669 \end{array}$

2) $\begin{array}{r} \overset{1}{3}\overset{1}{8}\overset{1}{6}85 \\ +\,101\,453 \\ \hline 140\,138 \end{array}$

Liitmisseadused.

1. *Liitmise vahetuvusseadus (kommutatiivsuse seadus).* Summa ei muutu, kui muudame liidetavate järjekorda:

$a+b=b+a$.

Näited.

1) $2+7=7+2$
2) $3+8+7=3+7+8$

2. *Liitmise ühenduvusseadus (assotsiatiivsuse seadus).* Kahe arvu summa liitmiseks mingi arvuga võib liita selle arvuga enne ühe liidetava ja siis tulemusega teise liidetava:

$a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$.

Näide.

$39+(31+45)=(39+31)+45=70+45=115$

Liitmise erijuhte.

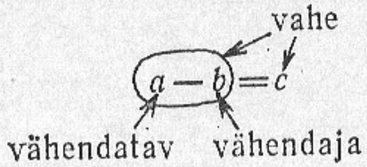
$0+a=a+0=a$;
$0+0=0$.

3.2.5. NATURAALARVUDE LAHUTAMINE.

Kahe arvu summa ja ühe liidetava järgi teise liidetava leidmist nimetatakse lahutamiseks. Üldiselt: lahutada arvust a arv b tähendab leida selline arv c, et $c+b=a$.

Üldkujulises võrduses $a-b=c$ on arv a vähendatav, arv b vähendaja, arv c (ehk $a-b$) on vahe.

Näide.



Mitmekohaliste arvude kirjalikul lahutamisel kirjutame vähendaja vähendatava alla nii, et nende ühenimelised järgud on kohakuti, vähendaja alla tõmbame joone. Siis lahutame vähendatava ühelistest vähendaja ühelised, vähendatava kümnelistest vähendaja kümnelised jne., kuni vähendatava kõige kõrgema järguni. Kui vähendatava mõnest järgust ei saa lahutada vähendaja vastavat järku, siis võtame vähendatava ühe võrra kõrgema järgu ühiku ja teisendame selle kümneks madalama järgu ühikuks. Kõrgema järgu ühiku võtmise kohta võib meelespidamise hõlbustamiseks selle järgu numbri kohale märkida punkti.

Näited.

1) $\begin{array}{r} 3\,586 \\ -\,2\,456 \\ \hline 1\,130 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \dot{8}\,\dot{8}31 \\ -\,2\,834 \\ \hline 5\,997 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} \dot{3}\,\dot{5}00 \\ -\,1\,725 \\ \hline 1\,775 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} \dot{5}0\,\dot{0}03 \\ -\,29\,078 \\ \hline 20\,925 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} \dot{1}00\,\dot{7}00 \\ -\,\quad 742 \\ \hline 99\,958 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} \dot{5}6\,000 \\ -\,27\,800 \\ \hline 28\,200 \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} \dot{2}50\,\dot{0}00 \\ -\,96\,013 \\ \hline 153\,987 \end{array}$

Mitmekohaliste arvude lahutamist saame kontrollida liitmise teel.

Näited.

1) $\begin{array}{r} 1\,130 \\ +\,2\,456 \\ \hline 3\,586 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \overset{1}{5}\overset{1}{9}\overset{1}{9}7 \\ +\,2\,834 \\ \hline 8\,831 \end{array}$ jne.

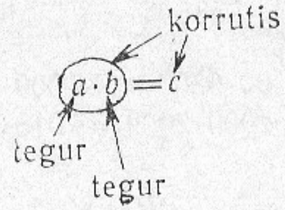
Lahutamise erijuhte.

$a - 0 = a$;
$a - a = 0$;
$0 - a$ ei ole teostatav naturaalarvude hulgas.

3.2.6 NATURAALARVUDE KORRUTAMINE.

Üldkujulises võrduses $a \cdot b = c$ on arvud a ja b tegurid, arv c (ehk $a \cdot b$) on *korrutis*.

Näide.



Järguühiku ja naturaalarvu korrutamisel tuleb sellele arvule juurde kirjutada nii mitu nulli, kui palju on neid järguühikus.

Näited.

$10 \cdot 27 = 270$
$345 \cdot 100 = 34\,500$
$1000 \cdot 57 = 57\,000$

Kirjalikul korrutamisel teeme arvutused järgmiselt. Korrutamist alustame madalama järgu ühikutest.

$\begin{array}{r} 7 \cdot 237 \\ \hline 1659 \end{array}$

Mitmekohaliste arvude korrutamisel toimime põhimõtteliselt nii.

$43 \cdot 538 = (40+3) \cdot 538 = 40 \cdot 538 + 3 \cdot 538 =$
$= 21\,520 + 1614 = 23\,134$

$\begin{array}{r} 43 \cdot 538 \\ \hline 1614 \\ 2152 \\ \hline 23134 \end{array}$

Kasutasime korrutamise jaotuvusseadust.

Näited.

1) $\begin{array}{r} 43\cdot538 \\ \hline 1614 \\ 2152 \\ \hline 23134 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 37\cdot205 \\ \hline 1435 \\ 615 \\ \hline 7585 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 406\cdot352 \\ \hline 2112 \\ 1408 \\ \hline 142912 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 1005\cdot204 \\ \hline 1020 \\ 204 \\ \hline 205020 \end{array}$ 5) $60\cdot9800=588\,000$

6) $2000\cdot2009=4\,018\,000$

Märkus. Korrutatakse nii, et osakorrutisi oleks võimalikult vähe. Nulliga korrutamisel saadav osakorrutis (koosneb ainult nullidest) jäetakse kirjutamata.

Korrutamisseadused.

1. *Korrutamise vahetuvusseadus (kommutatiivsuse seadus).* Korrutis ei muutu, kui muudame tegurite järjekorda:

$a\cdot b=b\cdot a.$

Näide.

$3\cdot7=7\cdot3$

2. *Korrutamise ühenduvusseadus (assotsiatiivsuse seadus).* Kahe arvu korrutise korrutamisel mingi arvuga võib selle arvuga korrutada esmalt ühe teguri ja tulemusega teise teguri:

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot c)\cdot b.$

Näide.

$5\cdot(4\cdot7)=(5\cdot4)\cdot7=20\cdot7=140$
$5\cdot(4\cdot7)=(5\cdot7)\cdot4=35\cdot4=140$

3. *Korrutamise jaotuvusseadus (distributiivsuse seadus).* Summa korrutamiseks mingi arvuga võib korrutada selle arvuga iga liidetava ja tulemused liita:

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$

Näited.

1) $5\cdot(12+100)=5\cdot12+5\cdot100=60+500=560$
2) $2\cdot(4+18+5)=2\cdot4+2\cdot18+2\cdot5=8+36+10=54$

Korrutamise erijuhte.

$a\cdot1=1\cdot a=a;$
$a\cdot0=0\cdot a=0;$
$0\cdot0=0;$

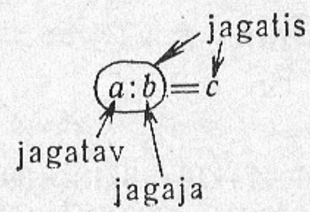
$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a}_{n\text{ tegurit}}=a^n$ (vt. jaot. 4.2., astendamine).

3.2.7. NATURAALARVUDE JAGAMINE.

Kahe teguri korrutise ja ühe teguri järgi teise teguri leidmist nimetatakse jagamiseks. Üldiselt: jagada arv a arvuga b tähendab leida selline arv c, et $c\cdot b=a$.

Üldkujulises võrduses $a:b=c$ on arv a jagatav, arv b jagaja ning arv c (ehk $a:b$) jagatis.

Näide.



Kirjalikul jagamisel tehakse arvutused järgmiselt.

1) $\begin{array}{r} 5304:17=312 \\ \hline 51 \\ \hline 20 \\ 17 \\ \hline 34 \\ 34 \\ \hline \end{array}$ Kontroll. $\begin{array}{r} 17\cdot312 \\ \hline 2184 \\ 312 \\ \hline 5304 \end{array}$

2) $\begin{array}{r} 7733:37=209 \\ \hline 74 \\ \hline 333 \\ 333 \\ \hline \end{array}$ Kontroll. $\begin{array}{r} 37\cdot209 \\ \hline 1463 \\ 627 \\ \hline 7733 \end{array}$

3) 9018009:1001=9009

9009
9009
9009

Kontroll. 1001·9009

9009
9009
9018009

Nullidega lõppeva naturaalarvu jagamisel järguühikuga tuleb arvu lõpust ära jätta nii mitu nulli, kui mitu on neid selles järguühikus.

Näited.

2370:10=237; 35000:100=350; 58000:1000=58.

Jagamisseadused.

1. *Korrutise jagamise seadus.*

Kahe arvu korrutise jagamiseks mingi arvuga võib selle arvuga jagada ühe teguri ja tulemuse korrutada teise teguriga:

$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c) = (a : c) \cdot b.$

Näited.

1) $(51 \cdot 13) : 17 = (51 : 17) \cdot 13 = 3 \cdot 13 = 39$
2) $9300 : 31 = (93 \cdot 100) : 31 = (93 : 31) \cdot 100 = 3 \cdot 100 = 300$

2. *Summa jagamise seadus.*

Summa jagamiseks mingi arvuga võib jagada iga liidetava selle arvuga ja tulemused liita:

$(a+b) : c = a : c + b : c.$

Näide.

$(13+39) : 13 = 13 : 13 + 39 : 13 = 1+3 = 4$

3. *Jagatise põhiomadus.*

Jagatis ei muutu, kui jagatav ja jagaja korrutada või jagada ühe ja sama nullist erinev arvuga:

$a : b = na : nb$ ja $na : nb = a : b.$

Näited.

1) 250:50=25:5=5
2) 3600:1200=36:12=3
3) 850:25=3400:100=34

Jagamise erijuhte.

$a : 1 = a;$
$0 : a = 0;$
$a : 0$ ei ole teostatav.

3.2.8. NATURAALARVUDE JAGUVUS. ARVU TEGURID JA KORDSED

Kui ühe naturaalarvu jagamisel teisega saadakse tulemuseks naturaalarv, siis öeldakse, et esimene *arv jagub* teisega. Iga naturaalarvu, millega antud arv jagub, nimetatakse antud *arvu teguriks.*

Arvud 1; 2; 3; 4; 6 ja 12 on arvu 12 tegurid.
Arvu 12 tegurite hulk on {1; 2; 3; 4; 6; 12}.

Iga naturaalarvu (peale nulli), mis jagub antud arvuga, nimetatakse selle *arvu kordseks.* Arvu kordne jagub antud arvuga.

Märkus. Jaguvuse uurimisel jäetakse arv 1 tegurina vaatluse alt välja.

3.2.9. JAGUVUSE TUNNUSED.

Arv jagub 2-ga siis, kui arvu üheliste number on paarisnumber, vastasel juhul mitte.

Märkus. Paarisnumbrid on 0, 2, 4, 6 ja 8.

2-ga jaguvad näiteks arvud 8; 12; 36; 128 jne.

Arv jagub 3-ga siis, kui arvu ristsumma jagub 3-ga, vastasel korral mitte.

Märkus. Arvu ristsumma on tema numbrite summa.

3-ga jagub näiteks arv 3846, sest tema numbrite summa (ristsumma) on 3+8+4+6=21 ja 21 jagub 3-ga.

Arv jagub 4-ga siis, kui arv lõpeb kahe nulliga või kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga, vastasel juhul mitte.

4-ga jagub näiteks arv 3124, sest tema kahest viimasest numbrist moodustatud arv 24 jagub 4-ga.

Arv jagub 5-ga siis, kui üheliste number on 0 või 5, vastasel korral mitte.

5-ga jaguvad näiteks arvud 30, 145, 1230 jne.

Arv jagub 8-ga siis, kui arv lõpeb kolme nulliga või tema kolmest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 8-ga, vastasel juhul mitte.

8-ga jaguvad näiteks arvud 9000 ja 14 688. Teise arvu korral on kolmest viimasest numbrist moodustatud arv 688, mis jagub 8-ga.

Arv jagub 9-ga siis, kui arvu ristsumma jagub 9-ga, vastasel juhul mitte.

9-ga jagub näiteks arv 981, sest tema ristsumma on $9+8+1=18$ ja 18 jagub 9-ga.

Arv jagub 10-ga siis, kui üheliste number on 0, vastasel juhul mitte.

Arv jagub 25-ga siis, kui arvu kaks viimast numbrit on 00, 25, 50 või 75, vastasel juhul mitte.

Arv jagub 50-ga siis, kui arvu kaks viimast numbrit on 00 või 50, vastasel juhul mitte.

Arv jagub 6-ga siis, kui ta jagub 2-ga ja 3-ga, vastasel juhul mitte.

6-ga jagub näiteks arv 31 242, kuna ta jagub 2-ga ja 3-ga.

Arv jagub 12-ga siis, kui ta jagub 3-ga ja 4-ga, vastasel juhul mitte.

12-ga jagub näiteks arv 216, sest ta jagub 3-ga ja 4-ga.

Arv jagub 18-ga siis, kui ta jagub 2-ga ja 9-ga, vastasel juhul mitte.

18-ga jagub näiteks arv 9396, sest ta jagub 2-ga ja 9-ga.

Arv jagub 7-ga, 11-ga või 13-ga siis, kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustatud arvu ja ülejäänud numbritest moodustatud arvu vahe (või vastupidi) jagub vastavalt 7-ga, 11-ga või 13-ga.

Näited.

Arv 251 321 jagub 7-ga, kuna vahe $321-251=70$ jagub 7-ga.
Arv 211 112 jagub 11-ga, kuna vahe $211-112=99$ jagub 11-ga.
Arv 32 123 jagub 13-ga, kuna vahe $123-32=91$ jagub 13-ga.

3.2.10. ALGARV JA KORDARV.

Algarvuks nimetatakse naturaalarvu, millel on ainult kaks tegurit (arv 1 ja arv ise).

Arv 13 on algarv, sest tema tegurid on ainult 1 ja 13.
Arvu 13 tegurite hulk on {1; 13}.

Kordarvuks nimetatakse naturaalarvu, millel on enam kui kaks tegurit.

Arv 24 on kordarv, sest tema tegurite hulk on

{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24}.

Arv 1 ei ole algarv ega kordarv, kuna tal on ainult üks tegur.

Algarvud kuni 349-ni.

2	31	73	127	179	233	283
3	37	79	131	181	239	293
5	41	83	137	191	241	307
7	43	89	139	193	251	311
11	47	97	149	197	257	313
13	53	101	151	199	263	317
17	59	103	157	211	269	331
19	61	107	163	223	271	337
23	67	109	167	227	277	347
29	71	113	173	229	281	349

Algarvude hulk on lõpmatu.

3.2.11. ANTUD ARVUDE SUURIM ÜHISTEGUR.

Antud arvude a, b, ... suurimaks ühisteguriks $S(a; b; \ldots)$ nimetatakse suurimat arvu, millega jagub iga antud arv.

Suurima ühisteguri leidmiseks tuleb antud arvud lahutada algtegureiks ja leida nende kõikide ühiste tegurite korrutis. Saadud korrutis on ühtlasi kõikide ühiste tegurite vähimate astendajatega astmete korrutis (vt. astme mõiste, jaot. 4.2.).

Näited.

Leiame arvude suurima ühisteguri.

1)

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

2)

30	2
15	3
5	5
1	

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

66	2
33	3
11	11
1	

$168=2^3\cdot3\cdot7$ $882=2\cdot3^2\cdot7^2$ $30=2\cdot3\cdot5$ $84=2^2\cdot3\cdot7$ $66=2\cdot3\cdot11$

$S(168;\ 882)=2\cdot3\cdot7=42$ $S(30;\ 84;\ 66)=2\cdot3=6$

Suurimat ühistegurit kasutatakse murdude taandamisel.

3.2.12. ANTUD ARVUDE VÄHIM ÜHISKORDNE.

Antud arvude *a*, *b* ... vähimaks ühiskordseks $V(a;\ b;\ \ldots)$ nimetatakse vähimat nullist erinevat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Vähima ühiskordse leidmiseks tuleb antud arvud lahutada algtegureiks ja leida korrutis, mille teguriteks on:

1) kõik esimese arvu tegurid (kogu esimene arv);
2) teisest arvust need tegurid, mida esimeses arvus ei esine või esineb vähem arv kordi;
3) kolmandast arvust need tegurid, mida esimeses ja teises arvus ei esine või esineb vähem arv kordi;
jne.

Saadud korrutis on tegurites esinevate algarvude suurimate astendajatega astmete korrutis.

Näited.

Leiame eelmises näites antud arvude vähima ühiskordse.

1) $V(168;\ 882)=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot3\cdot7=2^3\cdot3^2\cdot7^2=3528$
2) $V(30;\ 84;\ 66)=2\cdot3\cdot5\cdot2\cdot7\cdot11=2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=4620.$

Vähimat ühiskordset kasutatakse murdude liitmisel ja lahutamisel, kus ta on murdude ühiseks nimetajaks.

3.2.13. NATURAALARVUDE JÄÄGIGA JAGAMINE.

Olgu antud kaks naturaalarvu a ja b, kusjuures $a>b$. Sageli esineb juhuseid, kus a ei jagu b-ga; ei ole võimalik leida sellist naturaalarvu c, et võrdus $a:b=c$ oleks tõene.

Sellisel juhul on võimalik *jäägiga jagamine.* Jäägiga jagamisel leiame suurima naturaalarvu c nii, et selle korrutis jagajaga b ei ületaks jagatavat a.

Jagatava a ning jagatise c ja jagaja b korrutise vahet nimetatakse jäägiks. Tähistame jäägi tähega r, siis

$a-bc=r$ ehk $a=bc+r$.

Jääk on alati väiksem kui jagaja, seega kehtib seos $0\leqslant r<b$.

Näited.

1) 4325:19=227

38	
52	
38	
145	
133	
12	

Tulemusest näeme, et
4325:19=227, jääk 12, kusjuures

$0<12<19.$

Seega $4325=19\cdot227+12$.

2) 610:22=27

44	
170	
154	
16	

Tulemusest näeme, et
610:22=27, jääk 16, kusjuures

$0<16<22.$

Seega $610=22\cdot27+16$.

3.2.14. TEHETE JÄRJEKORD.

Mitme tehtega ülesandes kõigepealt astendatakse (jaot. 4.2.), seejärel korrutatakse või jagatakse (nende tehete esinemise järjekorras) ja lõpuks liidetakse või lahutatakse (nende tehete esinemise järjekorras). Kui ülesandes esinevad sulud, siis tehakse tehted esmalt ümarsulgudes, siis nurksulgudes ja seejärel looksulgudes.

Näited.

1. $72:3+15\cdot32-53=24+480-53=504-53=451$

2. $360-5\cdot(39+12:4-2)-270:10=133$

   1) $12:4=3$;
   2) $39+3=42$;
   3) $42-2=40$;
   4) $5\cdot40=200$;
   5) $270:10=27$;
   6) $360-200=160$;
   7) $160-27=133$.

3. $52+3\cdot[2\cdot25-(14+2)]-26:(49-36)=$
   $=52+3\cdot[50-16]-26:(49-36)=52+3\cdot34-26:13=$
   $=52+102-2=152$

4. $[(-4)^2-5\cdot8]\cdot(-3)+16:(-2)^3-3^2=$
   $=[16-5\cdot8]\cdot(-3)+16:(-8)-9=$
   $=[16-40]\cdot(-3)+(-2)-9=$
   $=(-24)\cdot(-3)+(-2)-9=72-2-9=61$

Märkus. Number tehtemärgi kohal on vastava tehte sooritamise järjekorranumber.

3.2.15. SEOSEID TEHETE KOMPONENTIDE JA RESULTAADI VAHEL.

1. Seos liidetava ja summa vahel.

Võrdusest $a+b=c$ tulenevad võrdused

$a=c-b$, $b=c-a$.

Ühe liidetava leidmiseks tuleb summast lahutada teine liidetav.

Näited.

1) $x+18=38$, $x=38-18$; $x=20$;
2) $147+x=689$; $x=689-147$; $x=542$.

2. Seosed vahe, vähendatava ja vähendaja vahel.

Võrdusest $a-b=c$ tulenevad võrdused

$a=c+b$, $b=a-c$.

Vähendatava arvutamiseks tuleb liita vahele vähendaja.
Vähendaja arvutamiseks tuleb vähendatavast lahutada vahe.

Näited.

1) $x-28=32$, $x=32+28$, $x=60$;
2) $138-x=38$, $x=138-38$, $x=100$.

3. Seos tegurite ja korrutise vahel.

Võrdusest $a\cdot b=c$ tulenevad võrdused

$a=c:b$, $b=c:a$.

Ühe teguri arvutamiseks tuleb korrutis jagada teise teguriga.

Näited.

1) $17\cdot x=510$, $x=510:17$, $x=30$;
2) $a\cdot2=6$, $a=6:2$, $a=3$.

4. Seosed jagatava, jagaja ja jagatise vahel.

Võrdusest $a:b=c$ tulenevad võrdused

$a=c\cdot b$, $b=a:c$.

Jagatava arvutamiseks tuleb korrutada jagatis ja jagaja.
Jagaja arvutamiseks tuleb jagatav jagada jagatisega.

Näited.

1) $x:4=5$, $x=5\cdot4$, $x=20$;
2) $372:x=62$, $x=372:62$, $x=6$.

3.2.16. TEHETE TEISI OMADUSI.

1. *Vahe korrutamiseks mingi arvuga* võib korrutada selle arvuga eraldi vähendatava ja vähendaja ning esimesest tulemusest lahutada teise:

$a\cdot(b-c)=ab-ac$.

Näide.

$4\cdot(25-12)=4\cdot25-4\cdot12=100-48=52$

2. *Vahe jagamiseks mingi arvuga* võib jagada selle arvuga eraldi vähendatava ja vähendaja ning esimesest tulemusest lahutada teise:

$$(a-b):c=a:c-b:c.$$

Näide.

$$(42-28):7=42:7-28:7=6-4=2$$

3. *Kahe arvu jagatise jagamiseks mingi arvuga* võib enne korrutada jagaja selle arvuga ja siis jagatava jagada saadud korrutisega:

$$(a:b):c=a:(b\cdot c).$$

Näide.

$$(90:5):6=90:(5\cdot 6)=90:30=3$$

4. *Kahe arvu summa lahutamiseks mingist arvust* võib sellest arvust lahutada enne ühe liidetava ja seejärel tulemusest teise liidetava:

$$a-(b+c)=(a-b)-c.$$

Näide.

$$85-(15+17)=(85-15)-17=70-17=53$$

5. *Arvu lahutamiseks kahe arvu summast* võib selle arvu lahutada ühest liidetavast ja tulemusele liita teise liidetava:

$$(a+b)-c=a+(b-c)=(a-c)+b.$$

Näide.

$$(123+145)-45=123+(145-45)=123+100=223$$

6. *Kahe arvu vahe lahutamiseks mingist arvust* võib sellest arvust lahutada vähendatava ja tulemusele liita vähendaja:

$$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

Näide.

$$267-(67-25)=(267-67)+25=200+25=225$$

3.3. KÜMNENDMURD.

3.3.1. KÜMNENDMURRU MÕISTE.

Koma abil kirjutatud arve nimetatakse kümnendmurdudeks.

Vaatleme pikkust 13 m 5 dm 7 cm 2 mm, mida saab kirjutada summana

$$13\text{ m}+\frac{5}{10}\text{ m}+\frac{7}{100}\text{ m}+\frac{2}{1000}\text{ m}.$$

Viimase summa saame kirjutada koma abil üheainsa arvuna nii: 13, 572 m (loe: *kolmteist koma viissada seitsekümmend kaks meetrit*).

Komast vasakul olevad numbrid (1 ja 3) väljendavad naturaalarvu kolmteist (13), mis näitab, mitu tervet meetrit on antud pikkuses. Komast paremal olevad numbrid väljendavad meetri murdosi: esimesel kohal komast paremal kümnendikke, teisel kohal sajandikke, kolmandal kohal tuhandikke.

Kümnendmurde kirjutatakse sama põhimõtte järgi nagu naturaalarvegi: liikudes vasakult paremale tähistab iga number eelmisest 10 korda väiksemaid ühikuid.

Kümnendmurd koosneb kahest osast: komast vasakul on *kümnendmurru täisosa numbrid* ja komast paremal *murdosa numbrid*.

Täisosa						Murdosa							
sajatuhandelised	tuhandelised	sajalised	kümnelised	ühelised	koma	kümnendikud	sajandikud	tuhandikud	kümnetuhandikud	sajatuhandikud	miljondikud	Kümnendmurd	
				2	,	4	8	9				2,489	
			2	7	,	3	0	7	3			27,3073	
				0	,	0	2	1	5	7		0,02157	
	3	2	0	4	,	5	1					3204,51	

Iga naturaalarvu saab esitada kümnendmurruna. Sel juhul moodustavad naturaalarvu numbrid kümnendmurru täisosa, murdosa järkude puudumist märgitakse 0-ga.

3.3.2. KÜMNENDMURDUDE VÕRDLEMINE.

Kümnendmurru väärtus ei muutu, kui tema lõppu nulle juurde kirjutada või seal olevad nullid ära jätta.

Näited.

$5 = 5{,}0 = 5{,}00 = \ldots$
$0{,}2700 = 0{,}270 = 0{,}27 = \ldots$

Kahe kümnendmurru võrdlemisel võrreldakse kõigepealt nende täisosi. Kahest kümnendmurrust on suurem see, mille täisosa on suurem. Kui kahe kümnendmurru täisosad on võrdsed, siis võrreldakse kümnendikke. Kahest võrdse täisosaga murrust on suurem see, milles on rohkem kümnendikke. Kui ka kümnendikke on ühepalju, võrreldakse sajandikke. Suurem on see kümnendmurd, milles on rohkem sajandikke. Jne.

Näited.

$25{,}7 > 20{,}98$
$13{,}87 > 13{,}39$
$0{,}232 > 0{,}2293$
$2{,}348 > 2{,}347$

Iga kümnendmurdu on võimalik kujutada punktina arvkiirel.

3.3.3. KÜMNENDMURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

1. **Kümnendmurdude liitmiseks** kirjutame nad üksteise alla nii, et komad ja samanimelised järgud on kohakuti. Edasi liidame neid nagu naturaalarve, koma tähele panemata. Summas kirjutame koma kohakuti liidetavate komadega.

Näited.

3,75	5,38	92,6
+ 38,38	+ 48,1	+ 210
42,13	53,48	3,204
		0,01
		305,814

2. **Kümnendmurdude lahutamisel** kirjutame vähendaja vähendatava alla nii, et komad ja samanimelised järgud on kohakuti. Seejärel lahutame neid nagu naturaalarve, koma tähele panemata. Vahes kirjutame koma kohakuti antud arvude komadega.

Näited.

42,32	8,538
− 37,21	− 7,252
5,11	1,286

Kui vähendatava ja vähendaja murdosas ei ole ühepalju numbreid, siis võib kirjutada vajaliku arvu nulle juurde sinna, kus neid vähem on.

Näited.

1) $0{,}17 - 0{,}026 = 0{,}144$

0,170
− 0,026
0,144

2) $67 - 2{,}83 = 64{,}17$

67,00
− 2,83
64,17

3) $25{,}837 - 9{,}5 = 16{,}337$

25,837
− 9,500
16,337

3.3.4. KÜMNENDMURDUDE KORRUTAMINE.

1. Kümnendmurru korrutamine järguühikuga.

Kümnendmurru korrutamisel ühest suurema järguühikuga tuleb selles kümnendmurrus tõsta koma nii mitu kohta paremale, kui mitu nulli on järguühikus.

Näited.

$10 \cdot 3{,}835 = 38{,}35$
$0{,}017 \cdot 100 = 1{,}7$

Kui antud kümnendmurrus on koma järel vähem numbreid, kui koma vaja tõsta on, tuleb kümnendmurru lõppu vajalik arv nulle juurde kirjutada.

Näited.

$1000 \cdot 2{,}52 = 2520$
$0{,}02 \cdot 10\,000 = 200$

Kümnendmurru korrutamisel ühest väiksema järguühikuga tuleb selles kümnendmurrus tõsta koma nii mitu kohta vasakule, kui mitu nulli on järguühikus.

Näited.

$0{,}01 \cdot 234{,}5 = 2{,}345$
$0{,}1 \cdot 15{,}6 = 1{,}56$
$0{,}001 \cdot 2{,}5 = 0{,}0025$

2. Kümnendmurru korrutamine naturaalarvuga.

Kümnendmurru korrutamisel naturaalarvuga jätame kümnendmurrus koma tähele panemata ja arvutame korrutise nii nagu naturaalarvude korral. Tulemuses eraldame komaga paremalt nii mitu kümnendkohta, kui palju neid on antud kümnendmurru murdosas.

Näited.

$31 \cdot 2{,}8$	$13 \cdot 0{,}54$	$42 \cdot 0{,}0537$
28	162	1074
84	54	2148
86,8	7,02	2,2554

$3 \cdot 0{,}017 = 0{,}051$; $40 \cdot 0{,}823 = 32{,}920$; $0 \cdot 5{,}5 = 0$.

3. Kümnendmurru korrutamine kümnendmurruga.

Selleks et korrutada üht kümnendmurdu teisega, jätame tegurites koma tähele panemata ja leiame saadud naturaalarvude korrutise. Tulemuses eraldame paremalt komaga nii mitu kümnendkohta, kui palju neid on tegurite murdosades kokku.

Näited.

1) $0{,}8 \cdot 2{,}35 = 1{,}880 = 1{,}88$

2) $5{,}3 \cdot 3{,}12$	3) $0{,}0032 \cdot 6{,}71$	4) $30{,}8 \cdot 0{,}0782$
936	1342	6256
1560	2013	2346
16,536	0,021472	2,40856

3.3.5. KÜMNENDMURDUDE JAGAMINE.

1. Jagamine järguühikuga.

Kümnendmurru jagamisel ühest suurema järguühikuga tuleb kümnendmurrus tõsta koma nii mitu kohta vasakule, kui mitu nulli on järguühikus.

Näited.

$18{,}4 : 10 = 1{,}84$; $37 : 10 = 3{,}7$; $257{,}3 : 100 = 2{,}573$.

Kui kümnendmurrus on koma ees vähem numbreid, kui koma vaja tõsta on, tuleb kümnendmurru ette vajalik arv nulle juurde kirjutada.

Näited.

$5{,}24 : 100 = 0{,}0524$; $0{,}23 : 1000 = 0{,}00023$; $5 : 100 = 0{,}05$.

2. Jagamine naturaalarvuga.

Kümnendmurru jagamisel naturaalarvuga jagame kõigepealt kümnendmurru täisosa ja paneme jagatise üheliste järele koma. Tekkinud jäägi teisendame kümnendikeks ja jagame koos jagatava kümnendikega. Uue jäägi teisendame sajandikeks ja jagame koos jagatava sajandikega. Sajandike jäägi teisendame tuhandikeks. Jne.

Näited.

332,8:16=20,8	5,481:27=0,203
32	54
128	81
128	81

3. Jagamine kümnendmurruga.

Kui jagaja on kümnendmurd, siis korrutame jagatavat ning jagajat sellise vähima järguühikuga, et jagaja muutuks naturaalarvuks. Edasi arvutame naturaalarvuga jagamise eeskirja kohaselt.

Näited.

1) 3,4:0,17=340:17=20;
2) 0,0275:0,025=27,5:25=1,1.

Märkus. Tehete järjekord arvutuste korral kümnendmurdudega on sama, mis naturaalarvude korral (jaot. 3.2.14.).

3.4. TÄISARVUD.

3.4.1. POSITIIVSED JA NEGATIIVSED ARVUD.

Mõnda suurust mõõdetakse teatavast kohast alates kahes vastassuunas.

Näited.

1. Merepinna kõrgust kokkulepitud kohas märgitakse arvuga 0; vastavat merepinna taset veemõõdulatil märgitakse nullkriipsuga. See kriips võetakse kõrguse mõõtmise nullpunktiks. Merepinnast madalamate kohtade kõrgust märgitakse arvuga, mille ette on kirjutatud miinusmärk. Arvude ette, mis väljendavad kohtade kõrgust ülalpool merepinda, kirjutatakse plussmärk.

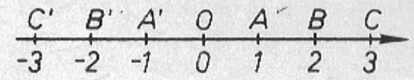
2. Temperatuuri mõõtmisel võetakse jää sulamistemperatuur (ehk vee külmumistemperatuur) mõõtmise nullpunktiks, mida märgitakse arvuga 0. Kui termomeeter näitab sooja, siis tähistatakse temperatuuri arvuga, mille ette on kirjutatud plussmärk; külmakraade märgitakse arvudega, mille ees on miinusmärk.

Miinusmärgiga arvud on negatiivsed arvud, plussmärgiga arvud on positiivsed arvud. Arv 0 ei ole positiivne ega negatiivne.

3.4.2. ARVTELG. PUNKTI KOORDINAAT.

Positiivseid ja negatiivseid arve koos arvuga 0 saab kujutada sirgjoone punktidena (joon. 3.2) analoogiliselt naturaalarvude kujutamisega arvkiirel (jaot. 3.2.2.).

Joon. 3.2



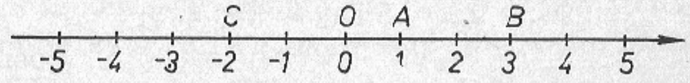
Selleks võtame sirge ühe punkti O nullpunktiks, see on arvu 0 kujutiseks. Mingi teise punkti A võtame ühikpunktiks, see on arvu 1 kujutiseks. Lõigu OA pikkust nimetatakse kujutamisühikuks.

Kõiki positiivseid arve kujutame kiire OA punktidena. Negatiivseid arve kujutame samal sirgel asetseval kiirel, alguspunkt on samuti punktis O, kuid see kiir on vastassuunaline võrreldes kiirega OA. Arvu -1 kujutiseks võtame punkti A', mis on sümmeetriline punktiga A punkti O suhtes. Lõigu OA' pikkus on võrdne kujutamisühikuga, $OA=OA'$. Arvu -2 kujutiseks võtame punkti B', mis on sümmeetriline punktiga B punkti O suhtes jne. Nii saame sirgel kujutada kõiki positiivseid ja negatiivseid arve koos arvuga 0. Seda sirget nimetatakse *arvteljeks*.

Positiivseid arve kujutava kiire (kiir OA joonisel 3.2) suunda nimetatakse arvtelje positiivseks suunaks, vastassuunda negatiivseks suunaks.

Punkti koordinaadiks arvteljel nimetatakse arvu, mida arvtelje punkt kujutab (joon. 3.3).

Joon. 3.3



Koordinaate märgitakse järgmiselt: $A(1)$; $O(0)$; $C(-2)$; $B(3)$ jne. Loe: *punkt A koordinaadiga* 1.

Vastandarvudeks nimetatakse kaht arvu, mille kujutised on arvtelje nullpunkti suhtes sümmeetrilised.

Vastandarvud on näiteks -3 ja 3; -8 ja 8; a ja $-a$. Nulli vastandarv on null ise. Vastandarvude a ja $-a$ korral me ei tea, kumb neist on positiivne, kumb negatiivne.

Kui a on positiivne arv, siis $-a$ on negatiivne arv. Näiteks kui $a=2$, siis $-a=-2$.

Kui a on negatiivne arv, siis $-a$ on positiivne arv. Näiteks kui $a=-5$, siis $-a=-(-5)=5$.

3.4.3. TÄISARVUD.

Positiivseteks täisarvudeks nimetatakse nullist erinevaid naturaalarve. Positiivsete täisarvude hulka tähistatakse $\mathbf{Z}^+$:

$$\mathbf{Z}^+=\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}.$$

Negatiivseteks täisarvudeks nimetatakse positiivsete täisarvude vastandarve. Negatiivsete täisarvude hulka tähistatakse $\mathbf{Z}^-$:

$$\mathbf{Z}^-=\{-1;\ -2;\ -3;\ \ldots\}.$$

Täisarvude hulk on arvu 0 ja kõigi positiivsete täisarvude hulga ning kõigi negatiivsete täisarvude hulga ühend.

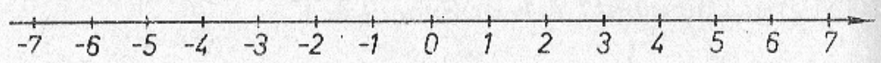
Täisarvude hulka tähistatakse $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{0\}\cup\mathbf{Z}^+\cup\mathbf{Z}^-=\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}.$$

Täisarvude järjestamine.

Kahest täisarvust loetakse suuremaks see, mille kujutis arvteljel on teisega võrreldes positiivses suunas.

Näiteks $-2>-5$ ehk $-5<-2$;
$-5<0$; $-2<2$; $-1<5$ (joon. 3.4).



Joon. 3.4

Seega võime öelda, et

1) iga positiivne arv on suurem igast negatiivsest arvust;
2) iga positiivne arv on suurem kui 0 ja iga negatiivne arv on väiksem kui 0;
3) kahest negatiivsest arvust on suurem see, mille absoluutväärtus (jaot. 3.4.5.). on väiksem (mille kujutis on nullpunktile lähemal).

3.4.4. TÄISARVUDE HULGA OMADUSI.

1. Täisarvude hulk on järjestatud.
2. Täisarvude hulgas ei ole suurimat ega vähimat arvu.
3. Täisarvude hulk on liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes kinnine arvuhulk (täisarvude summa, vahe ja korrutis on täisarv).

3.4.5. ARVU ABSOLUUTVÄÄRTUS.

Arvu absoluutväärtus on seda arvu arvteljel kujutava punkti kaugus nullpunktist (joon. 3.4).

Arvu a absoluutväärtust tähistatakse sümboliga $|a|$.

$|-3|=3$; $|0|=0$; $|5|=5$; $|+13|=13$.

Nulli või positiivse arvu absoluutväärtus on arv ise:

kui $a\geqslant 0$, siis $|a|=a$.

Negatiivse arvu absoluutväärtus on selle arvu vastandarv:

kui $a<0$, siis $|a|=-a$.

3.4.6. TÄISARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Kahe samamärgilise täisarvu summa on liidetavatega samamärgiline täisarv, mille absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste summaga.

Kui $a>0$ ja $b>0$, siis

$$-a+(-b)=-(a+b)$$

Näited.

$5+8=13$

$-8+(-3)=-(8+3)=-11$.

Kahe erimärgilise ja erineva absoluutväärtusega täisarvu summal on suurema absoluutväärtusega liidetava märk ja summa absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste vahega.

Kui $a>0$ ja $b>0$, siis

$$a+(-b)=a-b, \text{ kui } a>b,$$
$$a+(-b)=-(b-a), \text{ kui } a<b.$$

Näited.

$12+(-5)=+(12-5)=7$
$-34+12=-(34-12)=-22$

Kahe vastandarvu summa on null.

$a+(-a)=0$

Näited.

$-5+5=0$
$+37-37=0$

Täisarvu ja nulli summa on võrdne antud täisarvuga.

$a+0=a$

Näited.

$0+8=8$
$-7+0=-7$

Et lahutada arvust a arv b, tuleb arvuga a liita arvu b vastandarv.

$a-b=a+(-b)$

Näited.

$-28-(+12)=-28+(-12)=-40$
$36-(-4)=36+(+4)=40$

Mitmetehtelistes ülesannetes toimime järgmise eeskirja kohaselt:

1) asendame iga lahutamistehte vastandarvu liitmisega;
2) jätame saadud summas ära kõik sulud koos nende ees olevate liitmismärkidega;
3) saadud summas loeme esinevad märgid liidetavate märkideks.

Näide.

$(-2)+(-3)-(-7)-(+6)+(+4)-(+3)=$
$=(-2)+(-3)+(+7)+(-6)+(+4)+(-3)=$
$=-2-3+7-6+4-3=11-14=-3$

3.4.7. TÄISARVUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

Kahe samamärgilise täisarvu korrutis (jagatis) on positiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nende arvude absoluutväärtuste korrutisega (jagatisega).

Kui $a>0$ ja $b>0$, siis

$(+a)\cdot(+b)=+(ab)$;
$(-a)\cdot(-b)=+(ab)$;
$(+a):(+b)=+(a:b)$;
$(-a):(-b)=+(a:b)$.

Näited.

$-3\cdot(-8)=24$
$7\cdot3=21$
$-12:(-4)=3$

Kahe erimärgilise täisarvu korrutis (jagatis) on negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nende arvude absoluutväärtuste korrutisega (jagatisega).

Kui $a>0$ ja $b>0$, siis

$(-a)\cdot(+b)=(+a)\cdot(-b)=-(ab)$;
$-a:(+b)=+a:(-b)=-(a:b)$

Näited.

$-8\cdot3=-24$
$7\cdot(-2)=-14$
$28:(-4)=-7$
$-16:2=-8$

Kahe täisarvu korrutis on null, kui vähemalt üks tegur on null.

$a\cdot0=0\cdot a=0$

Nulli jagamisel nullist erineva arvuga on jagatis võrdne nulliga

$0:a=0$

N ä i t e d.

$0:(-5)=0$
$0:2=0$

Nulliga jagamine ei ole võimalik.

3.4.8. TÄISARVUDE ASTENDAMINE.

Astendamise mõiste (jaot. 4.2.).

Positiivse arvu aste on alati positiivne.

N ä i t e d.

$5^2=25$
$12^3=1728$
$3^4=81$

Negatiivse arvu aste on positiivne, kui astendaja on paarisarv, ja negatiivne, kui astendaja on paaritu arv.

N ä i t e d.

$(-3)^2=9$ $\qquad$ $(-3)^3=-27$
$(-2)^4=16$ $\qquad$ $(-2)^5=-32$

Iga arv astmes 1 on võrdne selle arvu endaga.

$a^1=a$

N ä i t e d.

$5^1=5$; $\qquad$ $(-4)^1=-4$.

On kokku lepitud, et **iga nullist erinev arv astmes 0 on võrdne 1-ga.**

$a^0=1$, kui $a\neq 0$.

N ä i t e d.

$(-3)^0=1$; $\quad 11^0=1$; $\quad 139^0=1$.

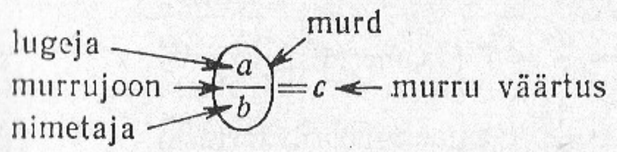
M ä r k u s e d. 1. Täisarvude liitmisel, lahutamisel, korrutamisel ja jagamisel kehtivad kõik naturaalarvude kohta õpitud seadused (jaot. 3.2.4.; 3.2.5.; 3.2.6. ja 3.2.7.).

2. Tehete järjekord arvutamisel täisarvudega on sama mis naturaalarvude korral (jaot. 3.2.14.).

3.5. HARILIK MURD.

3.5.1. HARILIKU MURRU MÕISTE.

Kahe nullist erineva naturaalarvu a ja b jagatist nimetatakse harilikuks murruks ja kirjutatakse kujul $\frac{a}{b}$ (või a/b).



Harilik murd on arv, mis näitab, mitmeks võrdseks osaks on ühik jaotatud ja mitu sellist osa on võetud.

N ä i d e.

Murru nimetaja → 3 ← 2 ← Murru lugeja näitab, et võrdseid osi on võetud kaks;
näitab, et ühik on jaotatud kolmeks võrdseks osaks.

Harilik murd väljendab ka jagamise tulemust, s. t. $2:3=\frac{2}{3}$.

Murdu $\frac{a}{b}$ nimetatakse

1) **lihtmurruks, kui $a<b$** $\left(\text{siis } \frac{a}{b}<1\right)$,

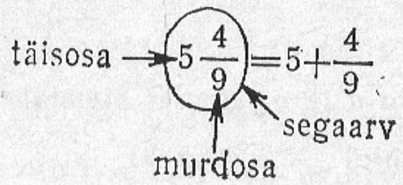
2) **liigmurruks, kui $a\geqslant b$** $\left(\text{siis } \frac{a}{b}\geqslant 1\right)$.

Näited.

$\frac{3}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$ jne. on lihtmurrud.

$\frac{4}{4}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{11}{10}$ jne. on liigmurrud.

Segaarvuks nimetatakse naturaalarvu ja lihtmurru summat. Enamasti kirjutatakse see ilma plussmärgita.



Erijuhtumid.

1. Kui $b=1$, siis $\frac{a}{b}=\frac{a}{1}=a$ (saame täisarvu).
2. Kui $a=1$, siis $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}$ (saame b pöördväärtuse).
3. Kui $a=0$, siis $\frac{a}{b}=\frac{0}{b}=0$.
4. Kui $b=0$, siis $\frac{a}{b}$ pole mõtet.
5. Murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ on teineteisele pöördväärtused.

3.5.2. HARILIKU MURRU PÕHIOMADUS.

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Üldiselt, kui $n\neq 0$, siis

$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$ ja $\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$.

Murru põhiomadust kasutatakse murru laiendamisel ja taandamisel.

3.5.3. HARILIKU MURRU LAIENDAMINE.

Murru laiendamiseks nimetatakse murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama nullist erineva arvuga. Arvu, millega murru lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse *laiendajaks*.

$\frac{a}{b}\overset{n}{=}\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$ $(n\neq 0)$.

Laiendaja märgitakse kaare sisse murru lugeja kohale.

Näited.

$\frac{3}{4}\overset{5}{=}\frac{15}{20}$; $\frac{3}{5}\overset{4}{=}\frac{12}{20}$.

Murru laiendamist kasutatakse murdude ühenimelisteks teisendamisel (ühise nimetaja leidmisel).

Antud murdude ühiseks nimetajaks võetakse tavaliselt nende nimetajate vähim ühiskordne.

Näide.

Teisendame ühenimelisteks murrud

$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{7}{24}$.

Et $V(3;\ 18;\ 24)=72$, siis

$\frac{2}{3}\overset{24}{=}\frac{48}{72}$; $\frac{5}{18}\overset{4}{=}\frac{20}{72}$; $\frac{7}{24}\overset{3}{=}\frac{21}{72}$.

3.5.4. HARILIKU MURRU TAANDAMINE.

Murru taandamiseks nimetatakse murru lugeja ja nimetaja jagamist ühe ja sama nullist erineva arvuga.

$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$ $(n\neq 0)$

Näited.

$\frac{12:4}{20:4}=\frac{3}{5}$; $\frac{250:50}{400:50}=\frac{5}{8}$; $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$.

Kasulik on taandada lugeja ja nimetaja nende suurima ühisteguriga. Kui lugejas ja nimetajas on mitu tegurit või taandatakse järk-järgult, siis kriipsutatakse jagatav tegur läbi ning selle kohale kirjutatakse jagatis:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{18}}{\cancel{42}\cdot\cancel{36}}=\frac{1}{2}$$
$$\underset{1}{\cancel{7}}\qquad\underset{2}{\cancel{6}}$$

Tegurit, millega jagatakse, ei märgita.

3.5.5. HARILIKE MURDUDE VÕRDLEMINE.

Kahest võrdse nimetajaga murrust on suurem see, mille lugeja on suurem.

Kahest võrdse lugejaga murrust on suurem see, mille nimetaja on väiksem.

Erinimeliste murdude võrdlemiseks tuleb murrud teisendada ühenimelisteks ja võrrelda saadud ühenimelisi murde.

Näited.

$\frac{3}{7}>\frac{2}{7}$, sest $3>2$; $\frac{6}{11}<\frac{6}{7}$, sest $7<11$;

$\frac{3}{4}>\frac{7}{10}$, sest $\frac{3}{4}\overset{5}{=}\frac{15}{20}$ ja $\frac{7}{10}\overset{2}{=}\frac{14}{20}$ ning $\frac{15}{20}>\frac{14}{20}$.

Murde saab võrrelda ka teisiti.

1. Selleks et võrrelda murde $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, leiame korrutised ad ja bc.

Kui

1) $ad>bc$, siis $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$;

2) $ad<bc$, siis $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$;

3) $ad=bc$, siis $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Võrdust $ad=bc$ nimetatakse murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ võrdsuse tunnuseks.

2. Selleks et võrrelda murde $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, võime need murrud jagada (jaot. 3.5.7.).

Kui

1) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}>1$, siis $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$;

2) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}<1$, siis $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$;

3) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=1$, siis $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

3.5.6. HARILIKE MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Ühenimeliste murdude summa (vahe) on murd, mille nimetajaks on murdude ühine nimetaja ja lugejaks murdude lugejate summa (vahe).

$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$, $(m\neq 0)$;

$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$, $(m\neq 0)$;

Näited.

$\frac{5}{8}+\frac{4}{8}=\frac{5+4}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$;

$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Võimaluse korral tuleb tehete tulemusi taandada; liigmurru puhul võib eraldada selle täisosa.

Segaarvude liitmisel (lahutamisel) tehakse tehted eraldi täisosadega ja murdosadega ning tulemused liidetakse.

Märkus. Vajaduse korral teisendatakse üks terve harilikuks murruks. Järgnevates näidetes sulgudes toodud teisendused ja arvutused jäetakse tavaliselt vahele, s. t. need tehakse peast.

Näited.

1) $4\frac{1}{5}+2\frac{2}{5}=\left(4+2+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=6+\frac{1+2}{5}\right)=6\frac{3}{5}$;

2) $5\frac{5}{6}-2\frac{1}{6}=\left(5-2+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=3+\frac{5-1}{6}\right)=3\frac{4}{6}=3\frac{2}{3}$;

3) $1-\frac{4}{9}=\left(\frac{9}{9}-\frac{4}{9}\right)=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}$;

4) $3-\frac{2}{5}=\left(2+1-\frac{2}{5}\right)=2+\frac{5-2}{5}=2\frac{3}{5}$;

5) $5\frac{3}{4}-2=\left(5+\frac{3}{4}-2=5-2+\frac{3}{4}\right)=3\frac{3}{4}$;

6) $6-2\frac{2}{3}=\left(6-2-\frac{2}{3}=4-\frac{2}{3}=3+1-\frac{2}{3}=\right.$
$\left.=3+\frac{3-2}{3}\right)=3\frac{1}{3}$;

7) $5\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=5+\frac{1-3}{4}=\left(4+1+\frac{1-3}{4}=4+\frac{4}{4}+\frac{1-3}{4}=\right.$
$\left.=4+\frac{4+1-3}{4}\right)=4+\frac{5-3}{4}=4\frac{2}{4}=4\frac{1}{2}$;

8) $6\frac{1}{5}-2\frac{3}{5}=4+\frac{1-3}{5}=3+\frac{6-3}{5}=3\frac{3}{5}$.

Isenimeliste murdude liitmisel ja lahutamisel tuleb teisendada murrud ühenimelisteks (jaot. 3.5.3.) ning kasutada siis ühenimeliste murdudega arvutamise eeskirju.

Näited.

$3\frac{3}{4}+2\frac{5}{6}=\left(3\frac{9}{12}+2\frac{10}{12}\right)=5+\frac{9+10}{12}=5\frac{19}{12}=6\frac{7}{12}$;

$8\frac{1}{5}-3\frac{7}{10}=\left(8\frac{2}{10}-3\frac{7}{10}\right)=5+\frac{2-7}{10}=$
$=4+\frac{12-7}{10}=4\frac{5}{10}=4\frac{1}{2}$.

Ühiseks nimetajaks on antud nimetajate vähim ühiskordne ja laiendajateks tegurid, mis saadakse ühise nimetaja jagamisel murru endise nimetajaga.

Märkus. Kui harilike murdude liitmisel ja lahutamisel esineb negatiivseid harilikke murde, siis tuleb pärast kõigi murdude ühenimeliseks teisendamist järgida reegleid, mis kehtivad negatiivsete arvude liitmisel ja lahutamisel (jaot. 3.4.6.).

3.5.7. HARILIKE MURDUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

Harilike murdude korrutis on murd, mille lugejaks on nende murdude lugejate korrutis ja nimetajaks murdude nimetajate korrutis:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Segaarvud ja naturaalarvud teisendatakse tavaliselt enne korrutamist liigmurdudeks.

Otstarbekas on ühisel murrujoonel enne korrutamist taandada.

Näited.

1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{2}{3}$;

2) $4\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{4\cdot3}{1\cdot5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$;

3) $1\frac{1}{2}\cdot1\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot5}{2\cdot\cancel{3}_{1}}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

Mõnikord on otstarbekas segaarv kirjutada täisosa ja murdosa summana ja siis korrutada, kasutades korrutamise jaotuvuse (distributiivsuse) seadust (jaot. 3.2.6.).

Näide.

$$\frac{2}{3}\cdot3\frac{3}{17}=\frac{2}{3}\cdot\left(3+\frac{3}{17}\right)=2+\frac{2}{17}=2\frac{2}{17}.$$

Harilike murdude jagatis on murd, mis saadakse esimese murru (jagatava) korrutamisel teise murru (jagaja) pöördarvuga.

Antud arvu *a pöördarvuks* nimetatakse arvu 1 ja antud arvu a jagatist, kui $a\neq0$.

Arvu a pöördarv on $\frac{1}{a}$, kui $a\neq0$.

Hariliku murru $\frac{a}{b}$ pöördarvuks on $\frac{b}{a}$, sest $1:\frac{a}{b}=\frac{1\cdot b}{a}=\frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Naturaalarvud ja segaarvud teisendatakse tavaliselt enne jagamist liigmurdudeks. Otstarbekas on ühisel murrujoonel taandada.

Näited.

1) $\frac{6}{7}:\frac{2}{3}=\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{\cancel{6}^{3}\cdot3}{7\cdot\cancel{2}_{1}}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$

2) $3\frac{2}{3}:2\frac{3}{4}=\left(\frac{11}{3}:\frac{11}{4}=\frac{11}{3}\cdot\frac{4}{11}\right)=\frac{\cancel{11}^{1}\cdot4}{3\cdot\cancel{11}_{1}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

3) $4:\frac{2}{3}=\left(\frac{4}{1}:\frac{2}{3}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot3}{1\cdot\underset{1}{\cancel{2}}}=6$

4) $1\frac{2}{3}:10=\left(\frac{5}{3}:\frac{10}{1}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{10}\right)=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot1}{3\cdot\underset{2}{\cancel{10}}}=\frac{1}{6}$

Murdarvude hulgas on jagamistehe alati teostatav, välja arvatud jagamine nulliga.

3.6. RATSIONAALARVUD.

3.6.1. RATSIONAALARVU MÕISTE.

Ratsionaalarvuks nimetatakse arvu, mis on esitatav kahe täisarvu jagatisena $\frac{a}{b}$ $(b\neq0)$.

Näited.

$0{,}5=\frac{1}{2}$; $3{,}75=3\frac{3}{4}$; $6{,}29=\frac{629}{100}$;

$-0{,}333\ldots=-0{,}(3)=-\frac{1}{3}$; $0=\frac{0}{5}$; $8=\frac{16}{2}$;

$\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{-8}{-2}=4$; $\frac{-6}{36}=-\frac{1}{6}$.

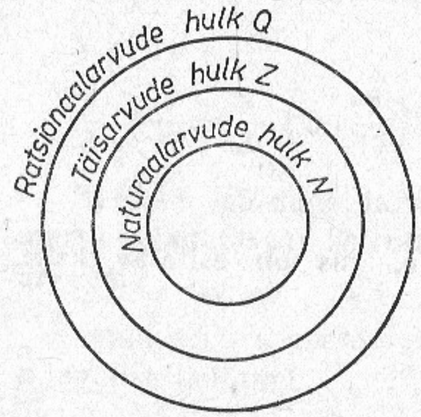
Kõik positiivsed ja negatiivsed harilikud murrud kokku moodustavad murdarvude hulga. Iga murdarv on avaldatav lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna (jaot. 3.6.2.).

Kõik täis- ja murdarvud moodustavad arvuhulga, mida nimetatakse ratsionaalarvude hulgaks. Seda arvuhulka tähistame tähega **Q**. Positiivsete ratsionaalarvude hulka (kuhu kuuluvad näiteks arvud 3; 51; 37,8; $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{15}{6}$ jne.) tähistame sümboliga $\mathbf{Q}^+$, negatiivsete ratsionaalarvude hulka (kuhu kuuluvad näiteks eelmiste arvude vastandarvud —3; —51; —37,8; $-\frac{3}{7}$;

$-\frac{8}{8}$; $-\frac{15}{8}$ jne.) sümboliga $\mathbf{Q}^-$. Hulgad $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$ ja $\{0\}$ moodustavad ratsionaalarvude hulga

$$\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{0\} = \mathbf{Q}.$$

Naturaalarvude hulga laiendamist ratsionaalarvude hulgani selgitab joonis 3.5.



$N \subset Z \subset Q$ Joon. 3.5

Iga ratsionaalarvu saab avaldada lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Näited.

$3 = 3,(0)$; $0,25 = 0,25(0)$; $-\frac{4}{9} = -0,(4)$; $\frac{16}{7} = 2,(285714)$.

Kehtib ka vastupidine väide: iga lõpmatu perioodiline kümnendmurd esitab ratsionaalarvu.

3.6.2. HARILIKE MURDUDE SEOS KÜMNENDMURDUDEGA.

1. Kümnendmurru teisendamine harilikuks murruks.

Lõpliku kümnendmurru murdosa teisendamisel harilikuks murruks kirjutame lugejaks kümnendmurru murdosa ja nimetajaks arvu 1 nii mitme nulliga, kui mitu kümnendkohta on kümnendmurrus. Võimaluse korral taandame. Kümnendmurru täisosa jääb ka saadava segaarvu täisosaks.

Näited.

$0,7 = \frac{7}{10}$; $1,04 = 1\frac{4}{100} = 1\frac{1}{25}$; $0,0607 = \frac{607}{10\,000}$.

2. Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagame hariliku murru lugeja nimetajaga.

Näited.

1) $\frac{2}{5} = 2:5 = 0,4$; 2) $\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333\ldots = 0,(3)$.

Kui taandumatu hariliku murru nimetaja tegurite hulgas esinevad algarvudest ainult 2 või 5 või mõlemad, siis teisendub harilik murd lõplikuks kümnendmurruks.

Kui taandumatu hariliku murru nimetajas esineb tegurina mis tahes teisi algarve peale 2 ja 5, siis teisendub harilik murd lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks.

Lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks nimetatakse kümnendmurdu, mille murdosas mingi number või numbrite rühm ühes ja samas järjestuses lõpmatult kordub.

Näited.

$0,666\ldots = 0,(6)$, loe: *null koma kuus perioodis*;
$2,131313\ldots = 2,(13)$, loe: *kaks koma kolmteist perioodis*;
$5,2383838\ldots = 5,2(38)$, loe: *viis koma kaks, kolmkümmend kaheksa perioodis.*

3.6.3. KÜMNENDMURRU ÜMARDAMINE. HARILIKU MURRU KÜMNENDLÄHEND.

Arvutamisel asendatakse harilikud murrud sageli kümnendmurdudega. Kui harilik murd avaldub lõpmatu kümnendmurruna, siis asendatakse ka sel juhul harilik murd lõpliku kümnendmurruga. See kümnendmurd on siis antud hariliku murruga võrdne vaid ligikaudselt ja teda nimetatakse hariliku murru kümnend-

lähendiks. Hariliku murru asendamine kümnendlähendiga toimub vastava kümnendmurru ümardamise teel.

Kümnendmurru ümardamisel jäetakse murdosa lõpust teatud hulk numbreid ära.

Ümardamise reegel. Kui esimene ärajäetav number on 5 või viiest suurem, siis suurendatakse lähendi viimast numbrit ühe võrra; kui esimene ärajäetav number on väiksem kui 5, jäetakse lähendi viimane number muutmata.

Näited.

$26{,}457 \approx 26{,}5$ (ümardatud kümnendikeni; viga ei ületa 0,05);
$0{,}2875 \approx 0{,}29$ (ümardatud sajandikeni; viga ei ületa 0,005);
$528{,}37 \approx 500$ (ümardatud sajalisteni; viga ei ületa 50).

Märkus. Ümardatavad murdosa numbrid jäetakse ära. Ümardatavad täisosa numbrid asendatakse nullidega. Hariliku murru kümnendlähendiks on selle hariliku murruga võrdse kümnendmurru ligikaudne väärtus.

Näited.

1) $\frac{41}{110} = 41:110 = 0{,}372\ldots \approx 0{,}37$ (täpsusega 0,01);

2) $\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}66\ldots \approx 0{,}7$ (täpsusega 0,1).

3.6.4. TEHTED HARILIKE JA KÜMNENDMURDUDEGA.

Harilikke ja kümnendmurde sisaldavate ülesannete lahendamisel juhindutakse järgmisest:

1) kui ülesanne nõuab täpset vastust, siis teisendatakse üldreeglina kümnendmurrud harilikeks murdudeks ja tehakse arvutused harilike murdudega;
2) kui ülesanne lubab piirduda ligikaudse vastusega, siis võib leida harilike murdude kümnendlähendid ja lahendada ülesande kümnendmurdudes;
3) mitme tehtega ülesandes võib sooritada osa tehteid harilike, osa kümnendmurdudega, olenevalt sellest, kuidas on lihtsam.

Näide.

$$\Big[\Big(\underset{\text{I}}{\frac{5}{6}}:\underset{\text{II}}{1\frac{2}{3}}-\underset{\text{III}}{0{,}2}\Big)\cdot\underset{\text{IV}}{1\frac{1}{6}}+\underset{\text{V}}{\frac{3}{20}}\Big]\cdot\underset{\text{VI}}{2{,}5}-\frac{1}{4}=1.$$

1) $\frac{5}{6}:1\frac{2}{3}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot 3}{\underset{2}{6}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{2}-0{,}2=0{,}5-0{,}2=0{,}3$;

3) $0{,}3\cdot 1\frac{1}{6}=\frac{3}{10}\cdot 1\frac{1}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 7}{10\cdot\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{7}{20}$;

4) $\frac{7}{20}+\frac{3}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{2}\cdot 2{,}5=0{,}5\cdot 2{,}5=1{,}25$;

6) $1{,}25-\frac{1}{4}=1{,}25-0{,}25=1$.

3.6.5. ARITMEETILINE KESKMINE.

Antud arvude aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse arvu, mis saadakse antud arvude summa jagamisel liidetavate arvuga.

Näide.

Antud arvud on 2,8; 3,6 ja $4\frac{2}{5}$. Nende aritmeetiline keskmine on $\left(2{,}8+3{,}6+4\frac{2}{5}\right):3=10{,}8:3=3{,}6$.

3.6.6. RATSIONAALARVUDE HULGA OMADUSI.

1. **Ratsionaalarvude hulk on järjestatud,** s. t. iga kahe erineva ratsionaalarvu kohta saab öelda, kumb on väiksem, kumb suurem.
2. **Ratsionaalarvude hulgas ei ole suurimat ega vähimat arvu,** s. t. alati on võimalik leida igast ratsionaalarvust suuremat ja ka väiksemat arvu.

3. **Ratsionaalarvude hulk on liitmise, korrutamise, lahutamise ja jagamise suhtes (kui jagaja ei ole null) kinnine arvuhulk,** s. t. ratsionaalarvude summa, vahe, korrutis ja jagatis on ikka mingi ratsionaalarv.

Märkused. 1. Ratsionaalarvude liitmisel, lahutamisel, korrutamisel, jagamisel ja astendamisel kehtivad kõik naturaalarvude kohta õpitud seadused ja reeglid (jaot. 3.2.4.—3.2.7.).

2. Tehete järjekord arvutamisel ratsionaalarvudega on sama, mis arvutamisel naturaalarvudega (jaot. 3.2.14.).

3. Ratsionaalarvude hulka saame kujutada arvtelje punktidena analoogiliselt täisarvudega (jaot. 3.4.).

3.7. PROTSENDID.

3.7.1. PROTSENDI MÕISTE.

Ühte sajandikku osa nimetatakse protsendiks.

Protsendi märk on %.

Nii võime öelda, et üks protsent, lühidalt 1% rublast, on 1 kop., 1% meetrist on 1 cm, 1% detsimeetrist on 1 mm, 1% kilomeetrist on 10 m jne.

Vajalik on meeles pidada, et:

10% on sama, mis 1 kümnendik osa;

20% on sama, mis 1 viiendik osa;

25% on sama, mis 1 neljandik osa;

$33\frac{1}{3}$ % on sama, mis 1 kolmandik osa;

50% on sama, mis pool.

75% on sama, mis 3 neljandikku osa;

100% on sama, mis 1 terve.

Protsente kasutame mitmesuguste ülesannete lahendamisel. Ülesannete lahendamisel on võimalik kasutada võrdekujulist võrrandit (jaot. 3.7.8.).

3.7.2. PROTSENDI LEIDMINE ARVUST.

Ülesanne. Kui palju on p% arvust a?

Ülesande lahendamiseks tähistame p% arvust a tähega x. Et 100% arvust a on a, siis moodustab arv p arvust 100 sama osa, mis arv x arvust a. Saame moodustada võrdekujulise võrrandi

$$\frac{100}{p}=\frac{a}{x};\quad \text{millest}\quad x=\frac{a}{100}\cdot p.$$

Taoliste ülesannete lahendamisel on otstarbekas kirjutada andmed nii, et ühes tulbas on protsendid ja teises tulbas neile protsentidele vastavad arvud. Vaadeldud ülesande jaoks saame siis

100% — a
p% — x

Näide.

Koolis on 400 õpilast. Nendest 75% läks matkale. Mitu õpilast läks matkale?

Lahendame ülesande kahel viisil.

1. lahendus. Et kogu õpilaste arv on 400, siis saame leida, mitu õpilast on 1% kogu õpilaste arvust. See on 1 sajandik osa, seega $\frac{400}{100}=4$ õpilast. Kuna matkale läks 75% õpilaste üldarvust, siis

$$\frac{400}{100}\cdot 75=4\cdot 75=300 \text{ õpilast.}$$

Niisiis matkale läks 300 õpilast.

2. lahendus. Tähistame matkajate arvu tähega x ja märgime üles andmed:

100% — 400 õpilast,
75% — x õpilast.

Moodustame võrdekujulise võrrandi

$$\frac{100}{75}=\frac{400}{x};\quad \text{millest}\quad x=\frac{400}{100}\cdot 75=300 \text{ õpilast.}$$

Et leida, kui palju on p% arvust a, tuleb algul leida 1 sajandik osa (lühidalt 1%) arvust a ja tulemus korrutada sajandike arvuga (lühidalt p%-ga).

3.7.3. HULGA PROTSENTUAALNE JAOTUS.

Kui hulk on jaotatud osahulkadeks ja on teada elementide arv igas osahulgas, siis saab arvutada, kui suure osa iga osahulk moodustab kogu hulgast. Selleks jagatakse elementide arvud osahulkades elementide arvuga kogu hulgas.

Ülesanne. Kontrolltöö sooritas 40 õpilast. Neist 10 said hinde «5», 22 said hinde «4» ja 8 said hinde «3». Kui suure osa moodustavad vastava hinde saanud õpilased kogu kontrolltöö sooritanud õpilaste hulgast?

Lahendus.

Tegemist on osahulkadega kontrolltöö sooritanud õpilaste hulgas. Osahulkades on 10, 22 ja 8 elementi, kogu hulgas 40 elementi.

Arvutame, kui suure osa iga klass moodustab kogu hulgast:

$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ õpilastest sai hinde «5».

$\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$ õpilastest sai hinde «4».

$\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$ õpilastest sai hinde «3».

Et kõik õpilased said hinde, siis peab leitud arvude summa olema 1. Kontrollime:

$$\frac{1}{4}+\frac{11}{20}+\frac{1}{5}=\frac{20}{20}=1.$$

Ülevaatlikum on esitada suhted protsentides. Selleks korrutame saadud arvud 100%-ga (vajaduse korral ümardame tulemused).

$\frac{1}{4}\cdot 100\%=25\%$

$\frac{11}{20}\cdot 100\%=55\%$

$\frac{1}{5}\cdot 100\%=20\%$

Leitud osahulkade protsentide summa peab olema 100%.

Kontrollime:

$25\%+55\%+20\%=100\%$

Nii saime kontrolltöö hinnete protsentuaalse jaotuse.

3.7.4. ARVU LEIDMINE ANTUD OSA JÄRGI.

Ülesanne.

Kui suur on arv, millest $p\%$ on a?

Ülesande lahendamiseks tähistame otsitava arvu tähega x.

Et 100% arvust x on x ja $p\%$ arvust x on a, siis

$100\% - x,$

$p\% - a;$

$\frac{100}{p}=\frac{x}{a}$, millest

$x=\frac{a}{p}\cdot 100.$

Näide.

Klassis on 18 õpilast ehk 75% kogu klassi õpilastest kommunistlikud noored. Mitu õpilast on klassis?

Lahendame ülesande kahel viisil.

1. lahendus. Tähistame õpilaste arvu klassis tähega x; siis võime kirjutada

$100\% - x$ õpilast,

$75\% - 18$ õpilast;

$\frac{100}{75}=\frac{x}{18}$, millest

$x=\frac{18}{75}\cdot 100=24$ õpilast.

Seega klassis on 24 õpilast.

2. lahendus. Et 18 õpilast moodustavad 75% kogu klassi õpilaste arvust, siis saame leida, mitu õpilast on 1% kogu õpilaste arvust. See on 1 sajandik osa, seega $\frac{18}{75}$ õpilast. Kuna kogu klass (1 terve) on 100%, siis

$\frac{18}{75}\cdot 100=\frac{6}{25}\cdot 100=24$ õpilast.

3.7.5. KAHE ARVU SUHE.

Kahe arvu a ja b suhteks nimetatakse nende jagatist $a:b$ ehk $\frac{a}{b}$.

Kahe arvu jagatis ehk suhe $a:b$, kus a ja b on mistahes arvud ($b\neq 0$), võimaldab arve a ja b suuruse poolest võrrelda. Kui $a:b>1$, siis $a>b$. Jagatis (suhe) näitab sel juhul, mitu korda on arv a suurem kui arv b ehk mitu korda on arv b väiksem kui arv a.

Kui $a:b<1$, siis $a<b$. Jagatis näitab sel juhul, kui suure osa moodustab arv a arvust b.

Kui $a:b=1$, siis $a=b$.

Selleks et võrrelda arve jagatise abil, avaldatakse see jagatis sageli protsentides.

Kui $\frac{a}{b}\cdot 100\%$ on suurem kui 100%, siis $a>b$,

kui $\frac{a}{b}\cdot 100\%$ on väiksem kui 100%, siis $a<b$,

kui $\frac{a}{b}\cdot 100\%$ on võrdne 100%-ga, siis $a=b$.

3.7.6. KAHE ARVU PROTSENTSUHE.

Ülesanne. Mitu protsenti on arv a arvust b?

Lahendus. Tähistame otsitava protsentide arvu tähega x, saame:

$$\begin{aligned} 100\% &- b \\ x\% &- a, \text{ millest} \end{aligned}$$

$\frac{100}{x}=\frac{b}{a}$; seega

$x=\frac{a}{b}\cdot 100.$

Näide.

Põllust on küntud 6 ha. Mitu protsenti see on, kui põldu on üldse 8 ha?

Lahendame kahel viisil.

1. lahendus. Tähistame otsitava protsentide arvu tähega x, siis saame

$$\begin{aligned} 100\% &- 8, \\ x\% &- 6, \end{aligned}$$

millest $\frac{100}{x}=\frac{8}{6}$, seega $x=\frac{6}{8}\cdot 100\%=75\%$.

Et leida, mitu protsenti on üks arv teisest, tuleb esimene arv jagada teisega ja tulemus korrutada sajaga.

2. lahendus. Et terve põllu suurus on 8 ha, siis saame leida, mitu hektarit on 1% põllust. See on kogu põllust 1 sajandik osa, seega $\frac{8}{100}$ ha. Siis on 6 ha sellest põllust protsentides

$6:\frac{8}{100}=\frac{6\cdot 100}{8}=75.$

Niisiis on 75% põllust küntud.

3.7.7. SUURUSE KASVAMISE JA KAHANEMISE VÄLJENDAMINE PROTSENTIDES.

Selleks et leida mitu protsenti on mingi suurus kasvanud või kahanenud, tuleb

1) leida selle suuruse muudu absoluutväärtus: suuruse kasvamise korral lahutada lõppväärtusest lähteväärtus, kahanemise korral lähteväärtusest lõppväärtus;
2) leida, mitu protsenti on saadud muudu absoluutväärtus suuruse lähteväärtusest.

Näited.

1. Kaugushüppe tulemus paranes 4 meetrilt 4,3 meetrile. Mitme protsendi võrra paranes tulemus?

a) Kasvamine on $4{,}3-4=0{,}3$ meetrit.
b) See moodustab algtulemusest $0{,}3:4=0{,}075=7{,}5\%$.

2. Eseme hind alanes 4,5 rublalt 3,6 rublani. Mitme protsendi võrra alanes hind?

a) Kahanemine on $4{,}5-3{,}6=0{,}9$ rubla.
b) See moodustab alghinnast $0{,}9:4{,}5=20\%$.

3.7.8. VÕRRE. VÕRDELINE JAOTAMINE.

Võrdust, mille mõlemal poolel on jagatis, nimetatakse võrdeks.

$a:b=c:d$ ehk $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Muutujad a, b, c ja d on võrde liikmed. Nendeks võivad olla mistahes arvud (välja arvatud $b=0$ ja $d=0$). Muutujad a ja d on võrde välisliikmed, b ja c siseliikmed.

välisliikmed

$a:b=c:d$

siseliikmed

Võrde põhiomadus.

Võrde välisliikmete korrutis võrdub tema siseliikmete korrutisega:

$ad=bc$.

Võrdeline jaotamine.

Olgu antud arvud a, b ja c, nii et

$\frac{a}{2}=k$, $\frac{b}{3}=k$ ja $\frac{c}{4}=k$, kus k on mingi nullist erinev arv.

Siis

$a=2k$, $b=3k$ ja $c=4k$.

Sel juhul öeldakse, et arvud a, b ja c on võrdelised arvudega 2, 3 ja 4, kus k on võrdetegur.

N ä i d e.

Et vältida aknaklaaside külmumist, võib neid hõõruda vedelikuga, milles glütseriini, keedusoola ja vee kaaluline suhe on 9:5:6. Kui palju glütseriini, keedusoola ja vett on vaja 700 grammi külmakindla vedeliku valmistamiseks?

Ülesande lahendamiseks peame kõigepealt teadma, mida tähendab glütseriini, keedusoola ja vee kaaluline suhe 9:5:6. See tähendab seda, et külmakindlas vedelikus on 9 kaaluosa glütseriini, 5 kaaluosa keedusoola ja 6 kaaluosa vett. Teisiti

öeldes, glütseriini ja keedusoola kaalud suhtuvad nagu 9:5, keedusoola ja vee kaalud suhtuvad nagu 5:6. Esiteks leiame, mitu kaaluosa üldse on. Neid on

$9+5+6=20$.

Et kogu vedeliku kaal on 700 grammi, siis saame nüüd arvutada ühe osa kaalu grammides:

$700:20=35$.

Kuna glütseriini on 9 kaaluosa ja iga osa kaalub 35 grammi, siis on vedelikus oleva glütseriini kaal grammides

$9\cdot35=315$.

Keedusoola ja vee kaal on grammides vastavalt

$5\cdot35=175$ ja $6\cdot35=210$.

Kontrolliks arvutame saadud kaalude summa:

$315+175+210=700$, nagu peabki olema.

Seega tuleb 700 g külmakindla lahuse valmistamiseks võtta 315 g glütseriini, 175 g keedusoola ja 210 g vett.

3.8. IRRATSIONAALARVUD. REAALARVUD.

3.8.1. IRRATSIONAALARVU MÕISTE.

Arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

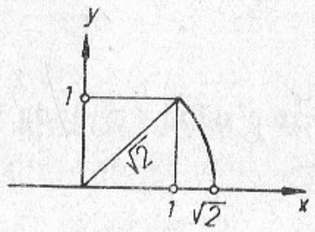
Arvud $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; sin 16°; tan 38° avalduvad lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, s. t. nad ei ole ratsionaalarvud, vaid on irratsionaalarvud.

Irratsionaalarve saab esitada mitmel kujul.

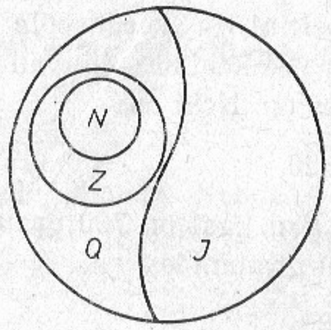
Näiteks $\sqrt{3}=\tan 60°=1{,}732050\ldots$.

Hulka, mille elementideks on kõik erinevad irratsionaalarvud (ükskõik millisel kujul), **nimetatakse irratsionaalarvude hulgaks ja tähistatakse tähega I.**

Igale irratsionaalarvule vastab arvteljel üks punkt (joon. (3.6).



Joon. 3.6



Joon. 3.7

3.8.2. REAALARVUD.

Ratsionaalarvude hulga ja irratsionaalarvude hulga ühendiks on reaalarvude hulk, mida tähistatakse tähega R.

R=QUI (joon. 3.7).

Igale reaalarvule vastab arvteljel üks kindel punkt ja ümberpöördult, arvtelje igale punktile vastab üks reaalarv. Seega on reaalarvude ja arvtelje punktide vahel üksühene vastavus ehk reaalarvude hulk ja arvtelje punktide hulk on ekvivalentsed.

3.8.3. REAALARVUDE HULGA OMADUSI.

1. **Reaalarvude hulk on järjestatud,** s. t. iga kahe erineva reaalarvu kohta saab öelda, kumb on väiksem, kumb suurem.

2. **Reaalarvude hulgas ei ole suurimat ega vähimat arvu,** s. t. alati on võimalik leida igast reaalarvust suuremat ja ka väiksemat arvu.

3. **Reaalarvude hulk on liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise (kui jagaja ei ole null) ja astendamise suhtes kinnine arvuhulk,** s. t. reaalarvude summa, vahe, korrutis, jagatis ja reaalarvu aste on ikka mingi reaalarv.

3.9. ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA.

3.9.1. TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD.

Hulga elementide loendamisel võime saada nii täpseid kui ka ligikaudseid arve. Sageli on vaja arve ümardada. Kõik ümardamisel saadud arvud on ligikaudsed. Ka mõõtmisel saadud arvud on ligikaudsed. Sellepärast tuleb mitmesuguste ülesannete lahendamisel tegelda arvudega, millest enamik on ligikaudsed.

3.9.2. ABSOLUUTSE VEA ÜLEMMÄÄR.

Arvu lähendiks nimetatakse täpse arvu ligikaudset väärtust.

Lähendi absoluutseks veaks nimetatakse täpse arvu ja tema lähendi vahe absoluutväärtust.

Näide.

Kui täpne arv $x=3{,}459$ ja tema lähend $a=3{,}5$, siis selle lähendi viga on

$$|x-a|=|3{,}459-3{,}5|=|-0{,}041|=0{,}041.$$

On võimalik otsustada, kui suur saab ülimalt olla saadud lähendi absoluutne viga ehk kui suur on selle lähendi absoluutse vea ülemmäär. Ligikaudse arvu absoluutse vea ülemmäär kirjutatakse arvu järele sulgudesse kahe märgi, plussi ja miinusega.

Näide.

Toa põranda pikkuse mõõtmisel saadi ligikaudne arv 4,36 m. Arvestades mõõtmistingimusi (mõõtmisvahendit, põranda ja ääreliistu siledust, mõõtja kogemusi jne.) hindame ligikaudse arvu absoluutse vea ülemmääraks 2 cm ehk 0,02 m. Kui põranda täpne pikkus on x meetrit, siis kirjutame, et

$$x=4{,}36\,(\pm 0{,}02)$$

(loe: 4,36 *pluss-miinus* 0,02).

Põranda pikkus on mõõdetud täpsusega 0,02 m ehk täpsusega 2 cm. See tähendab, et põranda pikkus meetrites ei saa olla väiksem kui

$$4{,}36-0{,}02=4{,}34$$

ega suurem kui

$$4{,}36+0{,}02=4{,}38$$

Arve 4,34 ja 4,38 nimetatakse vastavalt arvu x alamtõkkeks ja ülemtõkkeks.

Arv x asetseb oma alamtõkke ja ülemtõkke vahel (äärmisel juhul võib olla ka ühega nendest võrdne). Lühidalt

$$4{,}34\leqslant x\leqslant 4{,}38.$$

Kui täpse arvu x lähendiks on a, mille absoluutse vea ülemmäär on α, siis kirjutatakse, et $x\approx a(\pm\alpha)$ öeldakse, et arvu x lähend on antud täpsusega α:

$$a-\alpha\leqslant x\leqslant a+\alpha$$

arvu x alamtõke — arvu x ülemtõke

Absoluutse vea ülemmäära võib märkida ka kreeka tähega Δ (delta) abil:

$$x\approx a(\pm\Delta a).$$

Absoluutse vea ülemmäära ümardamisel tehakse seda alati liiaga, s. t. nii, et tema kõige madalam järk oleks sama, mis lähendi järk.

N ä i d e.

Kui $x=3{,}72(\pm 0{,}0345)$, siis absoluutse vea ülemmäära ümardamisel saame $x=3{,}72(\pm 0{,}04)$.

Alamtõke ümardatakse alati puuduga ja ülemtõke liiaga.

N ä i d e.

Esialgselt antud tõkked on $5{,}14\leqslant x\leqslant 5{,}18$, siis ümardamisel saame

$$5{,}1\leqslant x\leqslant 5{,}2.$$

3.9.3. RELATIIVSE EHK SUHTELISE VEA ÜLEMMÄÄR.

Ligikaudsete arvude võrdlemiseks suuruse poolest ei piisa ainuüksi absoluutse vea ülemmäära teadmisest. On veel vaja teada iga ühiku kohta tehtud viga. Selleks kasutame lähendi absoluutse vea ülemmäära ja lähendi jagatist.

Lähendi absoluutse vea ülemmäära ja lähendi jagatist nimetatakse lähendi relatiivseks ehk suhteliseks veaks. Relatiivse ehk suhtelise vea ülemmäära tähistatakse kreeka tähega δ.

Kui $x=a(\pm\alpha)$, siis lähendi a relatiivse vea ülemmäär

$$\delta(a)=\frac{\alpha}{a} \quad \text{ehk} \quad \delta(a)=\frac{\Delta a}{a}.$$

(Mõnikord jäetakse $\delta(a)$ ja Δa korral täht a kirjutamata.)

Relatiivne viga antakse harilikult protsentides, ümardades vea ülemmäära alati liiaga, tavaliselt protsendi kümnendikeni.

N ä i d e.

Kui $x=30(\pm 0{,}5)$, siis $a=30$, $\alpha=0{,}5$ ja $\delta=\frac{0{,}5}{30}\cdot 100\%=$

$=1{,}66\ldots\approx 1{,}7\%$.

3.9.4. ARVU ÕIGED NUMBRID.

Ligikaudse arvu numbrit nimetatakse õigeks numbriks, kui arvu absoluutse vea ülemmäär ei ületa selle numbriga kirjutatud järgu üht ühikut.

N ä i t e d.

1. Arvus $2{,}37(\pm 0{,}01)$ on kõik numbrid õiged, sest absoluutse vea ülemmäär ei ületa selle arvu ühegi järgu ühikut.
2. Arvus $0{,}853(\pm 0{,}012)$ on õiged üheliste number 0 ja kümnendike number 8. Sajandike number 5 ei ole enam õige, sest absoluutse vea ülemmäär 0,012 on suurem kui sajandiku järguühik 0,01.

3.9.5. ARVU TÜVENUMBRID JA STANDARDKUJU.

Ilma vea ülemmäärata antud ligikaudse arvu täpsuse üle võimaldab otsustada järgmine ligikaudsete arvude kirjutamise reegel.

Kui ligikaudse arvu vea ülemmäära ei märgita, siis kirjutatakse arv nii, et selle kõik numbrid oleksid õiged, välja arvatud täisarvu lõpunullid, mis asendavad ümardamisel kõrvaldatud numbreid.

Selle reegli kohaselt kirjutatud arvu õiged numbrid, välja arvatud kümnendmurru alguses olevad nullid, moodustavad arvu tüve ja neid numbreid nimetatakse *arvu tüvenumbriteks*.

Eriselgitust vajab nullidega lõppeva täisarvu kirjutamine.

Selleks et hinnata nullidega lõppeva täisarvu vea ülemmäära, trükitakse õppekirjanduses mõnikord arvu tüvesse mittekuuluvad nullid väiksemas kirjas. Käsitsi kirjutamisel tõmmatakse sellistele nullidele joon alla.

Näited.

Arv	Arvu tüvenumbrid
15,6	1-5-6
0,08	8
0,2070	2-0-7-0
234	2-3-4
10200	1-0-2-0
1700	1-7
$3{,}70 \cdot 10^3$	3-7-0

Nullidega lõppeva ligikaudse täisarvu kirjutamisel kasutatakse ka arvu 10 astmeid. Arv kirjutatakse sel juhul kahe teguri korrutisena, nii et esimeseks teguriks on arvu tüvi ja teiseks teguriks sobiv kümne aste. Arvu tüves tuleb kirjutada koma nii, et saadud arv oleks ühe ja kümne vahel. Nii kirjutatud arve nimetatakse *standardkujulisteks* ligikaudseteks arvudeks.

Näited.

1) $4200 = 4{,}2 \cdot 10^3$
2) $580\,000 = 5{,}80 \cdot 10^5$
3) $36\,000 = 3{,}6 \cdot 10^4$

3.9.6. SUMMA JA VAHE VEA ÜLEMMÄÄR.

Tähistame täpsed arvud x ja y ning nende lähendid vastavalt $a(\pm\alpha)$ ja $b(\pm\beta)$.

Ligikaudsete arvude summa absoluutse vea ülemmäär võrdub liidetavate absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

Üldiselt võime siis kirjutada

$$(a+b) - (\alpha+\beta) \leqslant x+y \leqslant (a+b) + (\alpha+\beta).$$

Näide.

Kui $x = 3{,}67\,(\pm 0{,}03)$ ja $y = 11{,}5\,(\pm 0{,}2)$,
siis $x+y = 15{,}17\,(\pm 0{,}23)$.

Ligikaudsete arvude vahe absoluutse vea ülemmäär võrdub vähendatava ja vähendaja absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

Üldiselt võime kirjutada

$$(a-b) - (\alpha+\beta) \leqslant x-y \leqslant (a-b) + (\alpha+\beta).$$

Näide.

Kui $x = 39{,}32\,(\pm 0{,}04)$ ja $y = 12{,}15\,(\pm 0{,}02)$,
siis $x-y = 27{,}17\,(\pm 0{,}06)$.

Summa ja vahe absoluutse vea ülemmäära leidmise eeskirjadest tuleneb, et kui avaldises esinevad ainult liitmis- ja lahutamistehted, siis sellise avaldise väärtuse absoluutse vea ülemmäär võrdub kõigi andmete absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

Praktilisel arvutamisel juhindutakse enamasti järgmisest reeglist.

Ligikaudsete arvude summa ja vahe tuleb ümardada nii, et selle viimane tüvenumber oleks samas järgus kui ta on kõige väiksema täpsusega lähteandmes.

Näited.

2,3	12	16,23
+ 15,42	+ 5,2	− 5,426
23,467	111,82	10,804 ≈ 10,80
41,187 ≈ 41,2	129,02 ≈ 129	

Kui andmete seas esineb täpseid arve, siis vastuse ümardamisel neid arvesse ei võeta. Täpsed arvud trükitakse paksemas kirjas (kui teisiti pole arusaadav).

Kui lähteandmed on erineva täpsusega, siis võib suurema täpsusega andmeid enne arvutamist ümardada. Et vältida sellest tingitud võimalikke lisavigu, siis jäetakse eelneval ümardamisel üks *varunumber*, mis lõpptulemusest kustutatakse ümardamise teel.

3.9.7. KORRUTISE JA JAGATISE VEA ÜLEMMÄÄR.

Tähistame täpsed arvud x ja y ning nende lähendid vastavalt $a(\pm\alpha)$ ja $b(\pm\beta)$.

Ligikaudsete arvude korrutise absoluutse vea ülemmäär on $\beta a+\alpha b$.

Üldiselt võime siis kirjutada

$$ab-(\alpha b+\beta a)\leqslant xy\leqslant ab+(\alpha b+\beta a).$$

Korrutise relatiivne viga võrdub tegurite relatiivsete vigade summaga.

Üldiselt $\delta(ab)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}$.

N ä i d e.

Ristküliku mõõtmed meetrites on $x=3{,}2(\pm0{,}1)$ ja $y=4{,}5(\pm0{,}2)$. Arvutame ristküliku pindala koos absoluutse vea ülemmäära ja relatiivse veaga.

Ristküliku ligikaudne pindala ruutmeetrites on

$3{,}2\cdot4{,}5=14{,}4$.

Mõõtmete relatiivsed vead on $\frac{0{,}1}{3{,}2}\approx0{,}032$; $\frac{0{,}2}{4{,}5}\approx0{,}045$.

Pindala relatiivne viga $0{,}032+0{,}045=0{,}077\approx0{,}08$.

Pindala absoluutse vea ülemmäär on

$0{,}08\cdot14{,}4=1{,}152\approx1{,}2$.

Ristküliku pindala on seega

$S=14{,}4(\pm1{,}2)$ m².

Jagatise relatiivne viga võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

Üldiselt $\delta\left(\frac{a}{b}\right)=\delta(a)+\delta(b)$ ehk $\delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}$.

Jagatise absoluutse vea ülemmäära arvutamiseks korrutame jagatise relatiivse vea jagatise lähendiga.

Üldiselt $\delta\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a}{b}$ ehk $\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}\right)\cdot\frac{a}{b}$.

N ä i d e.

Antud on arvud $13{,}7(\pm0{,}1)$ ja $6{,}9(\pm0{,}03)$.

Nende arvude jagatise lähend on $13{,}7:6{,}9=1{,}985\ldots$

Jagatava ja jagaja relatiivsed vead on vastavalt $\frac{0{,}1}{13{,}7}\approx0{,}0073$ ning $\frac{0{,}03}{6{,}9}\approx0{,}0044$.

Jagatise relatiivne viga on $0{,}0073+0{,}0044=0{,}0117\approx0{,}012$ ehk 1,2%.

Jagatise absoluutse vea ülemmäär on

$0{,}012\cdot1{,}985\approx0{,}023$, mistõttu võime jagatise kirjutada nii: $1{,}99(\pm0{,}03)$.

Ligikaudsete arvude korrutise ja jagatise täpsuse *ligikaudne hindamine* toimub järgmise reegli kohaselt.

Ligikaudsete arvude korrutises ja jagatises tuleb säilitada nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga lähteandmes.

N ä i t e d.

$$\begin{array}{r}22\,620\cdot14\\ \hline 316680\approx320000\end{array}$$

$$\begin{array}{r}0{,}57\cdot452{,}4\\ \hline 257{,}868\approx260\end{array}$$

$$\begin{array}{r}0{,}8\cdot142{,}3\\ \hline 113{,}84\approx100\end{array}$$

$$\begin{array}{r}470:1370=0{,}343\ldots\approx0{,}34\\ \hline 4700\\ 4110\\ \hline 5900\\ 5480\\ \hline 4200\\ 4110\\ \hline 90\end{array}$$

Kui andmete seas on täpseid arve, siis vastuses säilitatavate tüvenumbrite määramisel neid arvesse ei võeta.

Kui lähteandmete tüvenumbrite arvud on erinevad, siis võib suurema täpsusega andmeid enne arvutamist ümardada, säilitades siiski ühe varunumbri. Viimane koos sellele järgnevate numbritega kustutatakse tulemusest ümardamise teel.

N ä i d e. Korrutame ligikaudsed arvud 4,2 ja 1,763.

$4{,}2 \cdot 1{,}763 \approx 4{,}2 \cdot 1{,}76 = 7{,}392 \approx 7{,}4.$

Varunumbrit kasutame ka mitme tehtega ülesannetes. Vahepealsete tehete sooritamisel on aluseks järgmine reegel.

Vahepealsete tehete tulemuses tuleb säilitada üks number rohkem (varunumber), kui reegli kohaselt on vaja säilitada vastava tehte tulemuses.

Kirjalikul arvutamisel märgitakse varunumbrid ära allakriipsutamisega. Varunumbrid säilitatakse kuni lõpptulemuse saamiseni. Lõpptulemusest tuleb varunumbrid ja neist madalamad järgud (kui neid leidub) kustutada ümardamise teel.

N ä i t e d.

1. Mõõtmisel saadi risttahuka kohta järgmised andmed: pikkus 12,7 cm, laius 5,6 cm ja kõrgus 7,0 cm. Arvutame risttahuka täispindala ja ruumala:

1) risttahuka põhja pindala on
$12{,}7 \cdot 5{,}6 = 71{,}12 \approx \underline{71{,}1}$ cm²;
2) risttahuka kahe põhja pindala on
$2 \cdot 71{,}1 = 142{,}2 \approx \underline{142}$ cm²;
3) risttahuka põhja ümbermõõt on
$2 \cdot (5{,}6 + 12{,}7) = 2 \cdot 18{,}3 = 36{,}6$ cm;
4) risttahuka külgpindala on
$7{,}0 \cdot 36{,}6 = 256{,}2 \approx \underline{256}$ cm²;
5) risttahuka täispindala on
$\underline{256} + \underline{142} = \underline{398} \approx 400 = 4{,}0 \cdot 10^2$ cm²;

6) risttahuka ruumala on
$7{,}0 \cdot \underline{71{,}1} = \underline{497{,}7} \approx 500 = 5{,}0 \cdot 10^2$ cm³.

V a s t u s. Risttahuka täispindala on $4{,}0 \cdot 10^2$ cm² ja ruumala on $5{,}0 \cdot 10^2$ cm³.

2. $3{,}7 \cdot (16{,}8 + 4{,}79) + 15{,}9 : (3{,}7 - 1{,}23) \approx 86.$

1) $16{,}8 + 4{,}79 = 21{,}59;$
2) $3{,}7 \cdot 21{,}59 \approx 3{,}7 \cdot 21{,}6 = 79{,}92 \approx 80{,}0;$
3) $3{,}7 - 1{,}23 = 2{,}47;$
4) $15{,}9 : 2{,}47 = 6{,}44;$
5) $80{,}0 + 6{,}44 = 80{,}0 + 6{,}4 = 86{,}4 \approx 86.$

3.10. ARVUTUSLÜKATI.

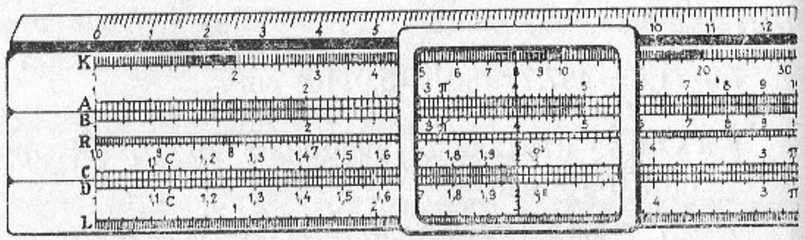
3.10.1. ARVUTUSLÜKATI EHITUS.

Ligikaudsetes arvutustes, kus ei vajata enam kui kolme tüvenumbrit, on sobiv kasutada *arvutuslükatit* (lühemalt lükatit). Lükati abil võime arve korrutada ja jagada, leida arvu ruutu ja ruutjuurt arvust, lahendada protsentülesandeid, võrdekujulisi võrrandeid jne.

Arvutuslükatil on kolm põhiosa (joon. 3.8): *korpus, keel* ja korpuse soontes liikuv *aken.* Viimasele on arvude märkimiseks kantud peenike joon — *märkija* ehk *märkel.* Lükati korpusel ja keelel on rida skaalasid, mis joonisel 3.8 on tähistatud tähtedega *K, A, B, C, D* ja *L.* Meie tutvume neist ainult ühe osaga.

Põhiskaaladeks nimetatakse *C*- ja *D*-skaalat. Need skaalad on kongruentsed, s. t. ühtivad. Põhiskaala esimene kriips on tähistatud arvuga 1 ja viimane arvuga 10. Mõnel lükatil on põhiskaalat pikendatud arvust 1 vasakule ja arvust 10 paremale. Neid pikendusi me esialgu ei kasuta. Kogu skaala on jaotatud jämedas trükis kirjutatud arvudega 2, 3, 4, ... 8, 9 üheksaks osaks, igaüks eri pikkusega. Lükati põhiskaala on seega mitteühtlane skaala.

Põhiskaala on vähima jaotuse väärtuse järgi jaotatud kolme ossa:



Joon. 3.8

1) vahemik 1-st 2-ni — vähima jaotuse väärtus 0,01;
2) vahemik 2-st 4-ni — vähima jaotuse väärtus 0,02;
3) vahemik 4-st 10-ni — vähima jaotuse väärtus 0,05.

Iga arvu jaoks ei leidu skaalal kriipsu ja arv tuleb sel juhul võtta silma järgi. Arvude märkimisel ja lugemisel tuleb alati hoolikalt jälgida, millise väärtusega on skaala iga vähim jaotus.

Lükati põhiskaala iga kriips märgib kõiki arve, millel on ühed ja samad tüvenumbrid.

C- ja *D*-skaalal saame üldiselt märkida ja lugeda kolme tüvenumbriga arve.

Arvutuste sooritamisel määratakse koma asukoht ligikaudse hinnangu võttega. Ligikaudne hinnang tehakse peast nii, et andmed ümardatakse ühe tüvenumbriga arvudeks ning sooritatakse peast tehted ümardatud arvudega.

Lükati põhiskaalal on järgmine omadus: **lükati keele mis tahes asendi korral on kohakuti olevate arvude jagatised võrdsed.**

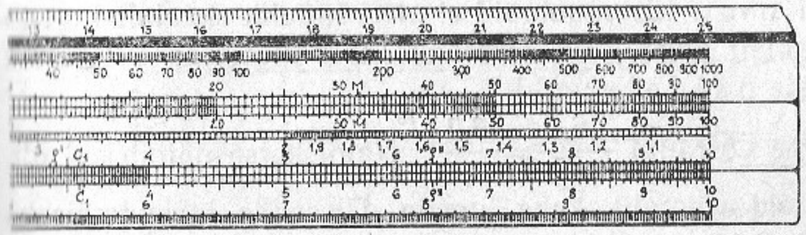
3.10.2. VÕRDEKUJULISE VÕRRANDI LAHENDAMINE LÜKATI ABIL.

Põhiskaalade omadus võimaldab lükati abil lahendada võrdekujulisi võrrandeid (joon. 3.9 ja 3.10).

N ä i t e d.

Lahendame järgmised võrrandid.

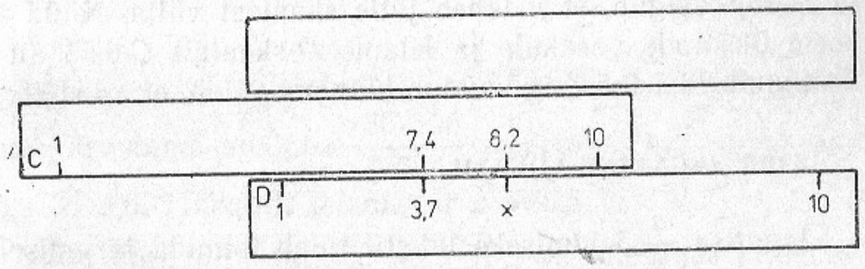
1) $\frac{7,5}{3,7}=\frac{3,3}{x}$; $x=1,63$;



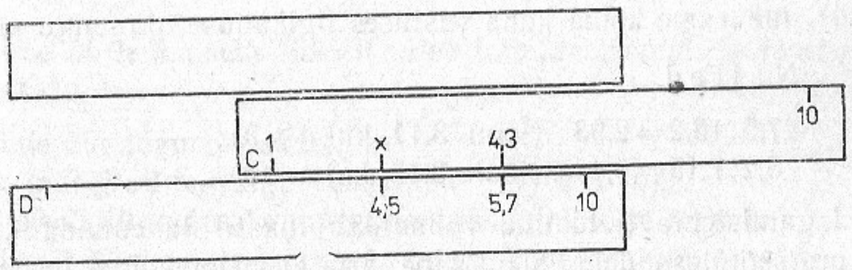
2) $\frac{x}{4,61}=\frac{25,6}{18,3}$; $x=6,45$;

3) $\frac{2,51}{0,18}=\frac{x}{4,14}$; $x=57,73$;

4) $\frac{0,25}{x}=\frac{0,32}{1,88}$; $x=1,469$.



Joon. 3.9



Joon. 3.10

Juhul kui arvu x tüvenumbreid ei ole võimalik skaalalt lugeda (x läheb skaalalt välja), siis teostame keele ülekande. Selgitame seda järgmiste n ä i d e t e varal.

1. Lahendame võrrandi $\frac{16,8}{x}=\frac{6,2}{3,1}$. Nagu katse näitab, ei ole x tüvenumbreid võimalik kohe lugeda. Ülesande lahendamiseks viime märkli C-10 kohale, kus nüüd on kohakuti arvud 10 ja 5. Lükati põhiskaalade omaduse põhjal võime kirjutada, et $\frac{16,8}{x}=\frac{6,2}{3,1}=\frac{10}{5}=\frac{1}{0,5}$. Seega võime antud võrrandi asemel lahendada võrrandi $\frac{16,8}{x}=\frac{1}{0,5}$. Selleks jätame akna paigale ja lükkame keele kogu pikkuse võrra paremale (keele ülekanne paremale) nii, et C-1 satub märkli alla, s. t. kohakuti kriipsuga D-0,5. Nüüd märgime C-16,8 ja loeme selle alt D-skaalalt x-i tüvenumbrid 8-4-0. Ligikaudne hinnang ütleb, et $x=8,40$.

2. Lahendame võrrandi $\frac{18,4}{46,5}=\frac{6,55}{x}$. Viinud kohakuti C-18,4 ja D-46,5 selgub, et x läheb jälle skaalast välja. Nüüd teostame keele ülekande vasakule ja leiame D-skaalalt C-6,55 alt vastuse tüvenumbrid 1-6-5. Ligikaudne hinnang ütleb, et $x=16,5$.

3.10.3. JAGAMINE LÜKATIL.

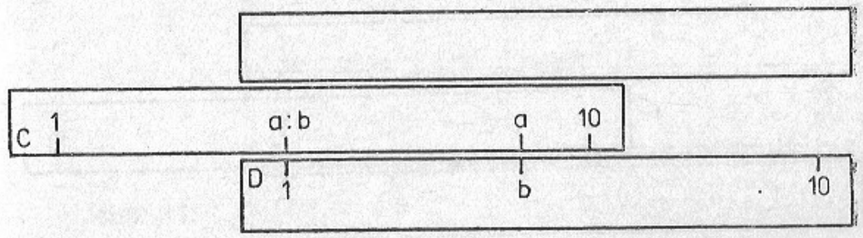
Jagatise $\frac{a}{b}$ leidmiseks lükatil tuleb toimida järgmiselt (joon. 3.11 ja 3.12):

1) märgime jagatava a C-skaalal;
2) seame jagatava kohakuti jagajaga b D-skaalalt;
3) loeme jagatise tüvenumbrid C-skaalalt D-1 (või D-10) kohalt;
4) määrame koma koha vastuses ligikaudse hinnangu abil.

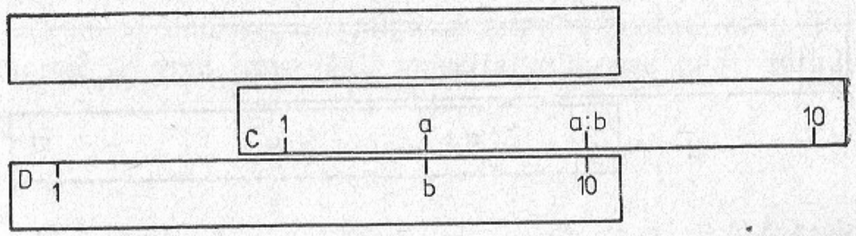
N ä i t e d.

47,5:16,2=2,93 (joon. 3.11, kui $a>b$);
3,2:7,15=0,448 (joon. 3.12, kui $a<b$).

Jagamistehte tundmine võimaldab lükatil lahendada ka 2 liiki protsentülesandeid, s. o. kahe arvu protsentsuhte ja antud osa järgi terviku leidmise ülesandeid.



Joon. 3.11



Joon. 3.12

N ä i t e d.

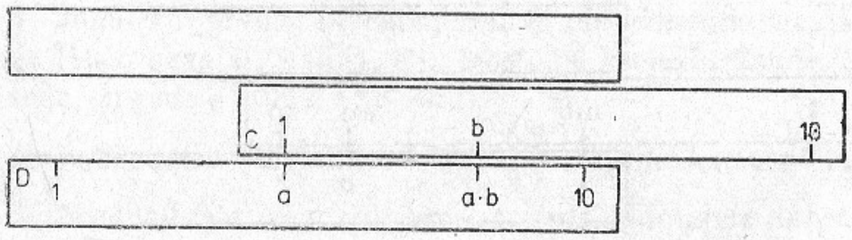
1. Leiame arvu x, millest 63% on 35. Ülesande lahendamiseks peame arvutama avaldise $\frac{35\cdot 100}{63}$ väärtuse, mis on võrdne jagatisega 35:0,63. Lükatilt leiame, et $x=55,6$.

2. Leiame, mitu protsenti on 4,35 19,8-st. Ülesande lahendamiseks leiame jagatise 4,35:19,8 ja korrutame tulemuse 100-ga. Lükatilt leiame, et 4,35:19,8=0,220, mistõttu vastuseks on 22,0%.

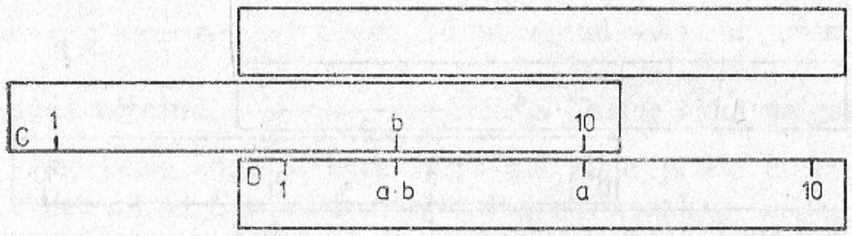
3.10.4. KORRUTAMINE LÜKATIL.

Korrutise ab leidmiseks lükatil tuleb toimida järgmiselt (joon. 3.13 ja 3.14):

1) märgime ühe teguri D-skaalal;
2) seame märgitud teguriga kohakuti C-1 (või C-10);
3) lükati keelt liigutamata märgime C-skaalal teise teguri;
4) märkli alt D-skaalalt leiame korrutise tüvenumbrid;
5) määrame koma koha vastuses ligikaudse hinnangu abil.



Joon. 3.13



Joon. 3.14

Näited.

1) $19{,}5 \cdot 0{,}125 = 2{,}44$ (joon. 3.13);
2) $8{,}3 \cdot 7{,}25 = 60{,}2$ (joon. 3.14).

Korrutamistehte tundmine võimaldab lükatil lahendada ühte liiki protsentülesannet, s. o. osa leidmise ülesannet.

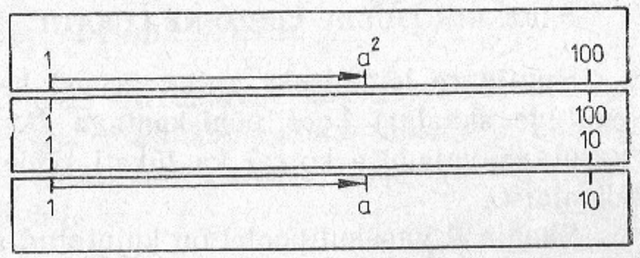
Näide.

Leiame, kui palju on 78% 565-st.

Ülesande lahendamiseks peame leidma avaldise $\frac{78 \cdot 565}{100}$ väärtuse, mis on võrdne korrutisega $0{,}78 \cdot 565$. Lükatil leiame, et see on 441.

3.10.5. ARVU RUUDU LEIDMINE LÜKATIL.

Arvu ruudu leidmiseks lükatil kasutatakse korpuse esiküljel asuvat skaalat *A* (ehk ruutude skaalat) koos põhiskaalaga *D*. Skaala *A* asemel võib kasutada vajaduse korral ka lükati keele ülemisel serval asuvat skaalat *B*.



Joon. 3.15

Skaalad *A* ja *B* on kongruentsed ning neil on kujutatud arvud 1-st 100-ni. Seejuures on nende skaalade esimesel poolel arvud 1-st 10-ni ja teisel poolel arvud 10-st 100-ni.

Arvu ruudu leidmiseks märgime skaalal *D* antud arvu ja loeme skaalalt *A* arvu, mis jääb märkija alla; see ongi antud arvu ruut.

Näited.

$1{,}5^2 = 2{,}25$; $1{,}8^2 = 3{,}24$; $5{,}6^2 = 31{,}4$; $8{,}9^2 = 79{,}2$.

Seega märgib märkija igas asendis skaalal *D* mingit arvu ja skaalal *A* selle arvu ruutu (joon. 3.15).

Skaalad *A* ja *B* on kaks korda väiksemas mõõdus kui põhiskaalad *C* ja *D*. Seetõttu ka jaotuste väärtused skaaladel *A* ja *B* ning *C* ja *D* on erinevad.

Alljärgnevas tabelis on toodud skaalade *A* ja *B* erinevad vahemikud ning neile vastavad vähima jaotuse väärtused.

Vahemik	1—2	2—5	5—10	10—20	20—50	50—100
Vähima jaotuse väärtus	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1

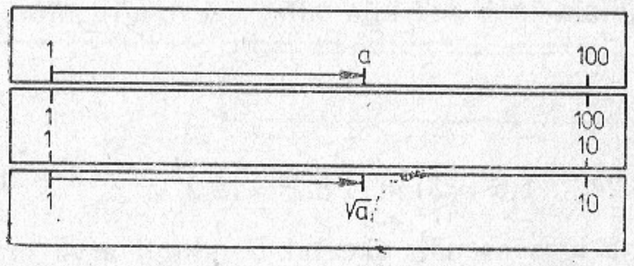
Koma asukoht tulemuses määratakse ligikaudse hinnangu põhjal.

3.10.6. RUUTJUURE LEIDMINE LÜKATIL.

Ruutjuure leidmiseks antud arvust kasutame skaalat *A* (ehk ruutude skaalat) koos põhiskaalaga *D*. Skaala *D* asemel võib kasutada vajaduse korral ka lükati keele alumisel serval asuvat skaalat *C*.

Skaala *A* vasakul poolel on kujutatud arvud 1 kuni 10 ja paremal poolel arvud 10 kuni 100.

Kui juuritav on vahemikus 1-st kuni 100-ni, siis märgime tema tüvenumbrid märkijaga skaala vastaval poolel. Märkija alt skaalalt *D* loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid (joon. 3.16).



Joon. 3.16

Näited.

$\sqrt{7{,}6}=2{,}76$; $\sqrt{4{,}04}=2{,}01$; $\sqrt{27{,}5}=5{,}24$; $\sqrt{48{,}3}=6{,}95$.

Kui arv, millest on vaja leida ruutjuurt, on 1-st väiksem või 100-st suurem, siis suurendame (või vähendame) antud arvu 100, 10 000, ... korda, nii et saame arvu, mille täisosa on kas ühe- või kahekohaline. Leiame sellest lükati abil ruutjuure ja vähendame (või suurendame) leitud arvu 10, 100, ... korda.

Näited.

$\sqrt{0{,}0795}=\sqrt{7{,}95}:10=2{,}82:10=0{,}282$;

$\sqrt{0{,}0085}=\sqrt{85}:100=9{,}22:100=0{,}0922$;

$\sqrt{365}=10\cdot\sqrt{3{,}65}=10\cdot 1{,}91=19{,}1$;

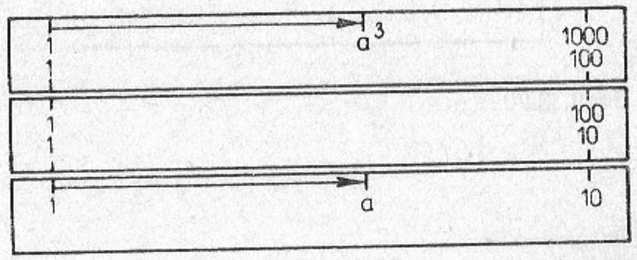
$\sqrt{455000}=100\cdot\sqrt{45{,}5}=100\cdot 6{,}75=675$.

3.10.7. KOMBINEERITUD TEHTEID LÜKATIL.

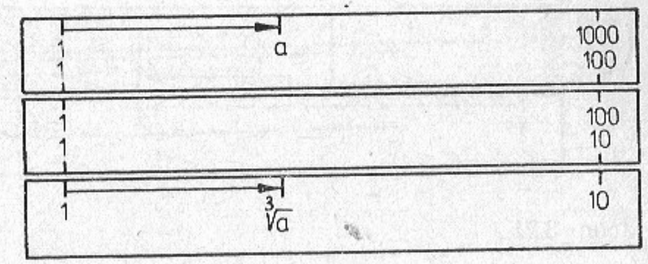
Järgnevad skeem-joonised tutvustavad lihtsamaid kombineeritud tehteid, mida sageli on vaja matemaatika, füüsika ja keemia ülesannete lahendamisel. Märgime otsitava tulemuse tähega x, antud arvud tähtedega a, b ja c.

$x=a^3$ (joon. 3.17); $x=\sqrt[3]{a}$ (joon. 3.18);

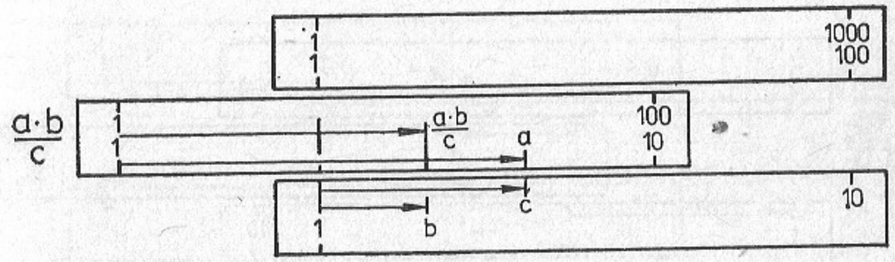
$x=\frac{a\cdot b}{c}$ (joon. 3.19);



Joon. 3.17



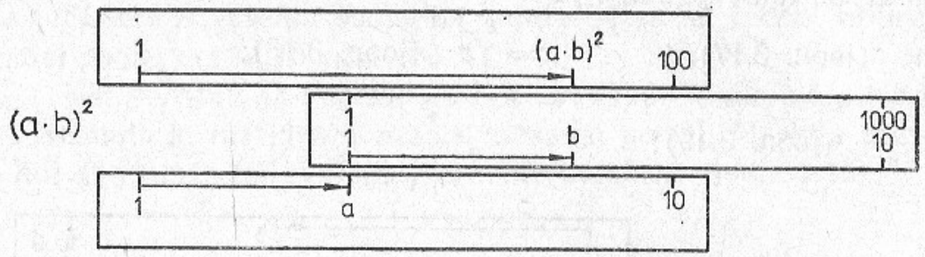
Joon. 3.18



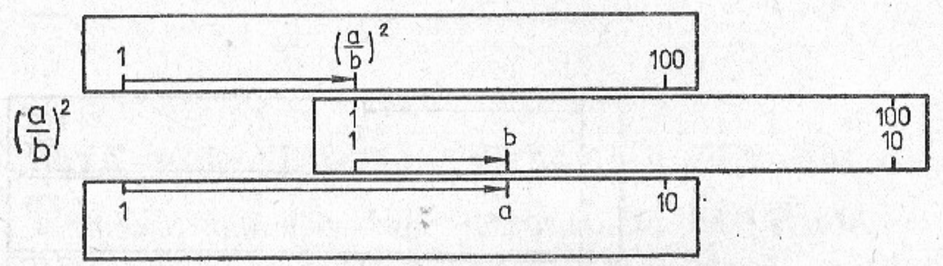
Joon. 3.19

$x = (a \cdot b)^2$ (joon. 3.20); $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ (joon. 3.21);

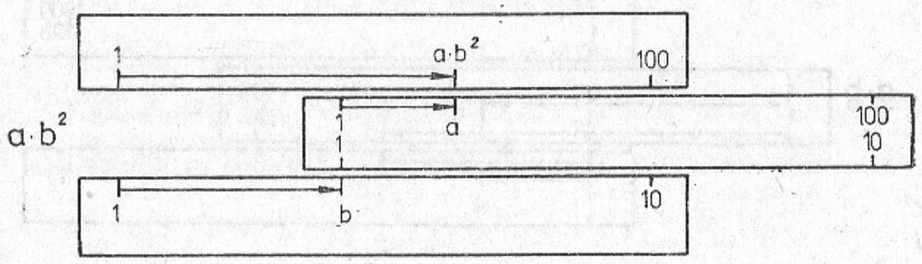
$x = a \cdot b^2$ (joon. 3.22);



Joon. 3.20



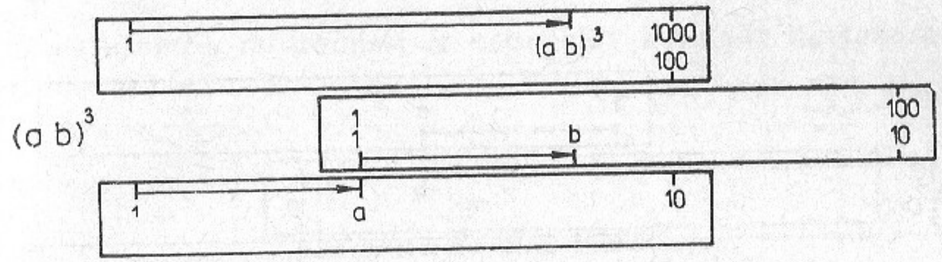
Joon. 3.21



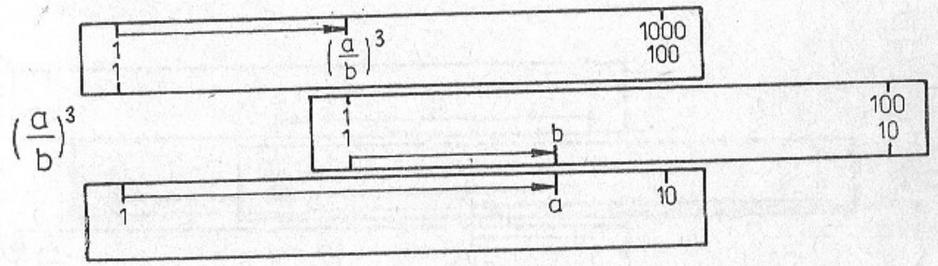
Joon. 3.22

$x = (a \cdot b)^3$ (joon. 3.23); $x = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ (joon. 3.24);

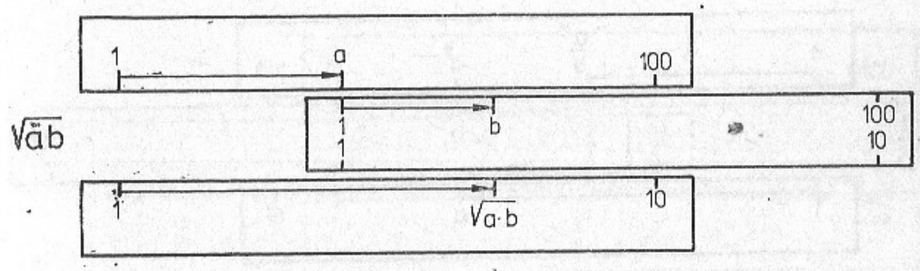
$x = \sqrt{ab}$ (joon. 3.25);



Joon. 3.23



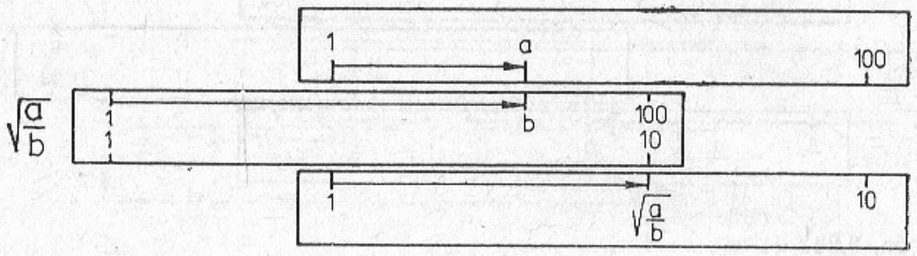
Joon. 3.24



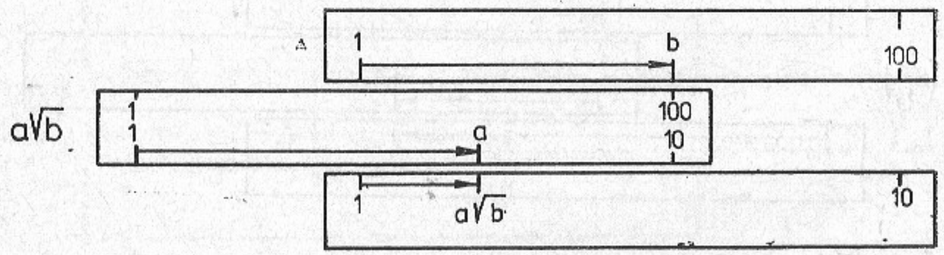
Joon. 3.25

$x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ (joon. 3.26); $x=a\sqrt{b}$ joon. 3.27);

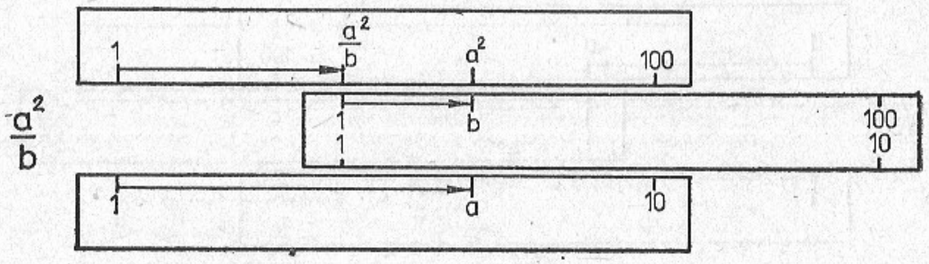
$x=\frac{a^2}{b}$ (joon. 3.28);



Joon. 3.26



Joon. 3.27

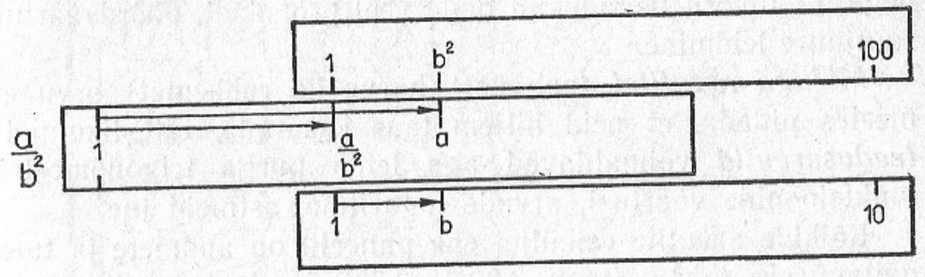


Joon. 3.28

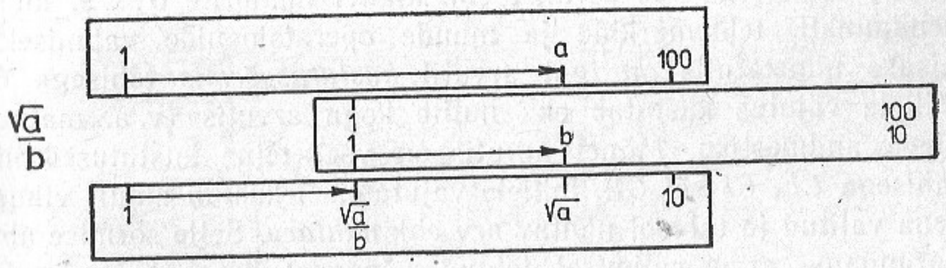
$x=\frac{a}{b^2}$ (joon. 3.29); $x=\frac{a}{\sqrt{b}}$ (joon. 3.31).

$x=\frac{\sqrt{a}}{b}$ (joon. 3.30);

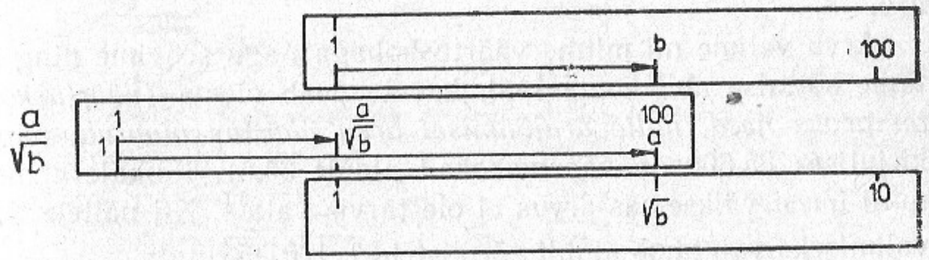
Koma asukoha määramisel on soovitatav kasutada ligikaudse hindamise võtet.



Joon. 3.29



Joon. 3.30



Joon. 3.31

3.11. TASKUARVUTI.

3.11.1. TASKUARVUTI ARVUTUSVAHENDINA.

Arvutuslükati kõrval on taskuarvuti (ehk lihtsalt arvuti) saanud meil üsna tavaliseks tarbeasjaks. Arvuti suured eelised lükati ees on vaieldamatud, kui arvestada kõiki nendes peituvaid võimalusi.

Kõige lihtsamad on nn. *neljatehtearvutid*, mille võimalused piirduvad aritmeetika nelja põhitehte ja nende kombinatsioonidega. Mõnikord lisanduvad neile veel protsendi, pöördväärtuse ja ruutjuure leidmine.

Mäluga arvutitel saab üht (harva ka rohkemat) arvu eraldi meeles pidada, et neid hiljem taas kasutada, täiuslikumad ehk *teadusarvutid* võimaldavad aga leida nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, arvude logaritme, astmeid jne.

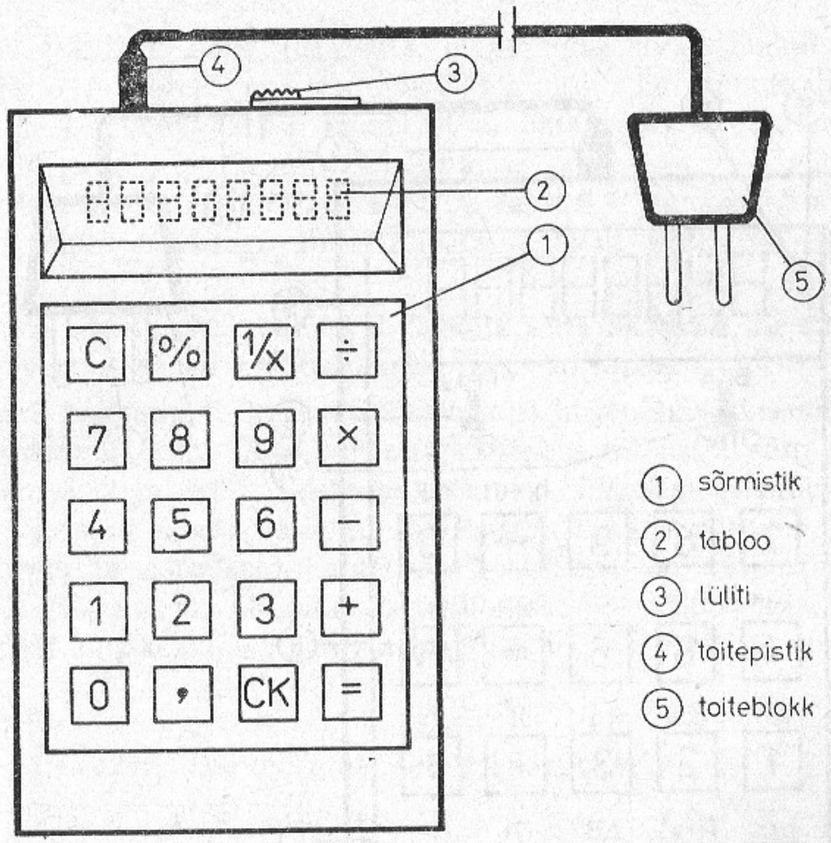
Kõikide arvutite esiküljel ehk paneelil on andmete ja tulemite näitamiseks *tabloo* (joon. 3.32 ja 3.33). Peale numbrite saab tablool näidata veel kümnendpunkti (tavalise kirjaviisi koma asemel), miinusmärki ning mõnda erimärki.

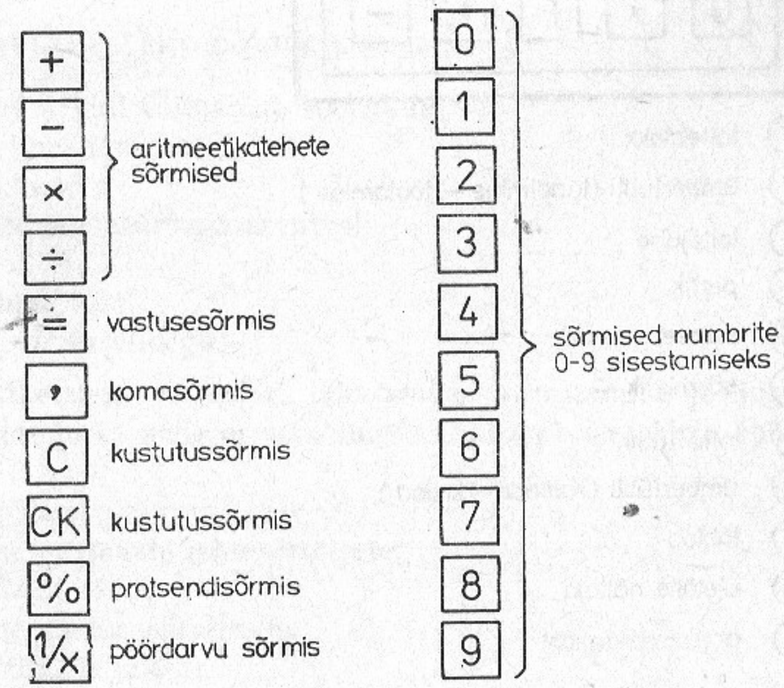
Igal arvutil on *sõrmistik* (joon. 3.32 ja 3.33), millel asub olenevalt tüübist 20—40 sõrmist ehk klahvi numbrite 0 . . . 9, kümnendpunkti, tehtemärkide ja muude operatsioonide valimiseks. Lisaks nimetatuile on igal arvutil *kustutussõrmis* tähisega C, millele vajutus kustutab ehk nullib kogu arvutis (v. a. mälus) oleva andmestiku. Mõnel arvutil on veel teine kustutussõrmis tähisega *CE*, *CI* või *CK*, millele vajutamisel kustub ainult viimasena valitud ja tablool nähtav arv ehk *nähtarv*. Selle sõrmise abil parandame arvu valimisel tehtud näpuvea, ilma et tarvitseks kogu arvutust otsast alustada.

Üldiselt on alati kindel **mis tahes arvutust alustades vajutada kõigepealt kaks korda sõrmisele C ja alles siis valida esimene arv.**

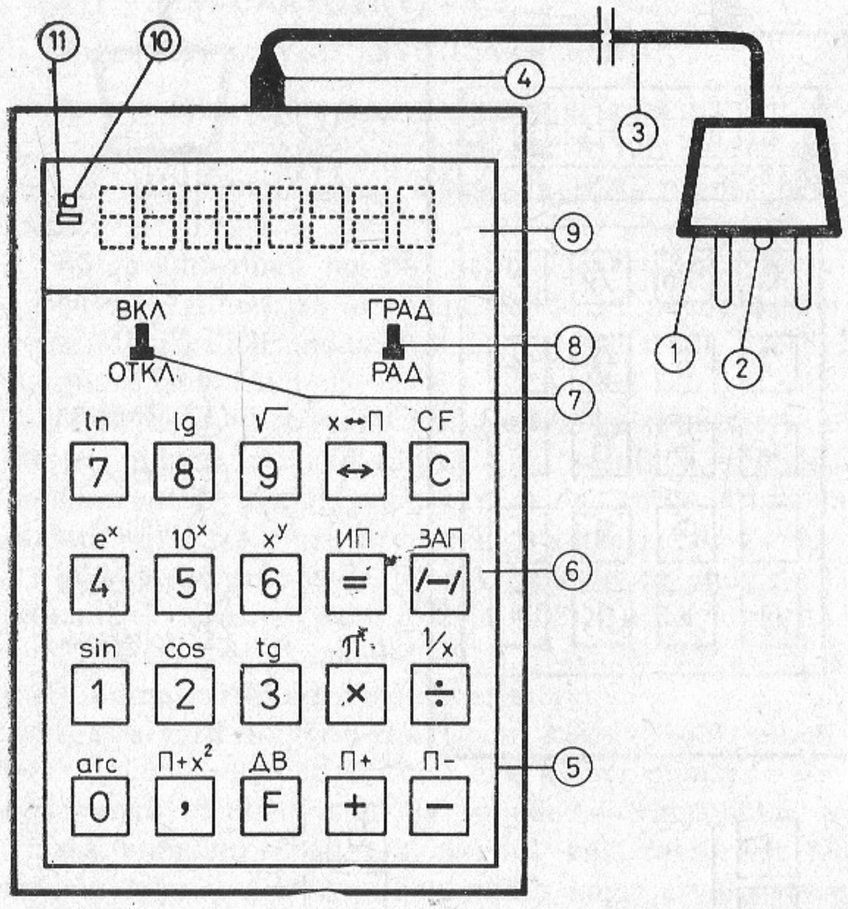
Arvu valime nii mitme väärtuskohaga nagu soovime ning näitame sõrmise abil koma seal, kus ta peab olema (*väärtuskohad on arvus need, mille ärajäämisel arvu väärtus muutub*; näiteks kirjutises 35,600 on väärtuskohad ainult 35,6). Komale eelnevat nulli ühest väiksemas arvus ei ole tarvis valida. Nii näiteks 0,056 valimiseks vajutame ainult sõrmistele [,] [0] [5] [6].

Kõik arvutustulemused annab arvuti nii, et tulemi täisosa





Joon. 3.32



1. toiteblokk
2. ümberlüliti (laadimine — töötamine)
3. toitejuhe
4. pistik
5. paneel
6. sõrmistik
7. toite lüliti
8. ümberlüliti (radiaan — kraad)
9. tabloo
10. ületäite näitaja
11. arvu märgi koht

Joon. 3.33

on tablool täielikult näha (eeldades, et ta sinna üldse mahub), komajärgseid numbreid aga esitatakse nii palju, kui ruumi üle jääb (viimast kümnendkohta enamasti ei ümardata). Kui murd lõpeb nullidega, siis iga arvuti neid ei näita.

Kui tulem ära ei mahu (tavaliselt on tablool 8 numbrikohta), siis on tegemist *ületäitega,* millest teatab tablool süttiv sellekohane märk.

Täisarvu sisestamisel tuleb valida kõik selle numbrid kirjutamise järjekorras, kaasa arvatud nullid täisarvu lõpus.

Edaspidi hakkame taskuarvuti kasutamist kirjeldama skeemide ehk *programmide* abil. Sõrmised on tähistatud nii nagu sõrmistikul (joon. 3.32 ja 3.33). Vastavad numbrid, tähed ja tehtemärgid on kirjutatud nende valimise järjekorras ning trükitud paksemas kirjas ja sõrmiseid kujutavad kastikesed on välja joonestatud. Vihikus ja klassitahvlil võib sõrmiste märkimiseks kasutada nii kastikesi kui ka allakriipsutusi, teist värvi kirja vms.

N ä i d e.

Tehte $23 \cdot 3{,}42 = 78{,}66$ märgime skeemil järgmiselt:

|2|3|×|3|,|4|2|=| *78.66*

3.11.2. ARVUTI «ELEKTROONIKA Б3-09 М».

Nimetatud arvuti võimaldab sooritada:

1) kõiki aritmeetikatehteid;
2) ahelarvutusi;
3) korduvate operantidega arvutusi;
4) astendamisi;
5) protsentarvutusi;
6) tehteid pöördarvudega.

Aritmeetikatehete (liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise) sooritamiseks kahe arvuga toimime järgmise eeskirja kohaselt:

1) valime esimese arvu;
2) vajutame vastavale tehtesõrmisele;
3) valime teise arvu;
4) vajutame vastusesõrmisele;
5) loeme tabloolt tulemi.

Näited.

1) 12,478+491,17

[C][C][1][2][,][4][7][8][+][4][9][1][,][1][7][=] *503.648*

2) 123,56 — 98,3

[C][C][1][2][3][,][5][6][—][9][8][,][3][=] *25.26*

3) 123,56·98,7

[C][C][1][2][3][,][5][6][×][9][8][,][7][=] *12195.37*

4) 141,304:41,56

[C][C][1][4][1][,][3][0][4][÷][4][1][,][5][6][=] *3.4*

Ahelarvutused.

Ahelarvutuste korral tuleb sooritada järjekorras rida aritmeetikatehteid, kus eelmise tehte tulem on järgneva tehte üheks liikmeks ehk *operandiks*.

Selliste ülesannete lahendamisel peab kinni pidama tehete sooritamise järjekorrast (vajaduse korral võib rakendada arvutamisseadusi, mis tulemust ei muuda). Ahelarvutustes pole vastusesõrmise igakordne kasutamine vajalik (vahetulemeid saame tabloolt lugeda pärast järgneva tehte valimist).

Näited.

1) $\frac{(25{,}7-4{,}6)\cdot 4{,}3}{2}$

[C][C][2][5][,][7][—][4][,][6][×][4][,][3][÷][2][=] *45.365*

2) $13\cdot 27+4{,}6-6{,}4241+\frac{1}{6{,}125}$

[C][C][1][3][×][2][7][+][4][,][6][—][6][,][4][2][4][1][+]

[+][6][,][1][2][5][$\frac{1}{x}$][=] *349.3391*

Arvutused korduvate operandidega.

Sageli tuleb sooritada tehteid, kus üks operand jääb samaks, teine aga omandab mitmesuguseid väärtusi. Kuna pärast mingi vastuse saamist säilib arvutis meile nähtamatul kujul ka sellest tehtest osa võtnud teine operand, siis võime seda ära kasutada järgmiselt:

1) valime esimese arvu;
2) vajutame nõutava tehte sõrmisele;
3) valime teise arvu;
4) vajutame vastusesõrmisele;
5) loeme tabloolt tulemi;
6) valime järgmise arvu;
7) vajutame vastusesõrmisele;
8) loeme tabloolt tulemi jne.

Näited.

1) 22+340 [C][C][2][2][+][3][4][0][=] *362*
98+340 [9][8][=] *438*
15+340 [1][5][=] *355*

2) 3:2 [C][C][3][÷][2][=] *1.5*
4:2 [4][=] *2*
10:2 [1][0][=] *5*
3,7:2 [3][,][7][=] *1.85*

3) 3·2 [C][C][3][×][2][=] *6*
5·2 [5][=] *10*
0,46·2 [0][,][4][6][=] *0.92*

Astendamine.

Astendamisel kasutame võtet, millega tutvusime eelmiste näidete juures.

Arvu astendamiseks mis tahes täisarvulise astendajaga

1) valime arvu 1;
2) vajutame korrutamissõrmisele;

3) valime astme aluse (selle arvu, mida tahame astendada);
4) vajutame n korda vastusesõrmisele (n on astmenäitaja);
5) loeme paneelilt tulemi.

Näide.

Leiame 12^5

[C] [C] [1] [×] [1] [2] [=] [=] [=] [=] [=] *248832*

Pöördarvu leidmine.

Antud arvu pöördväärtuse leidmiseks

1) valime selle arvu;
2) vajutame pöördarvu sõrmisele;
3) loeme paneelilt tulemi.

Näited.

Leiame

$\frac{1}{25}$ [C] [C] [2] [5] [1/x] *0.04*

$\frac{1}{40}$ [C] [C] [4] [0] [1/x] *0.025*

Protsentülesanded.

1. Leida p% (p sajandikku osa) arvust a.

Selleks

1) valime arvu a;
2) vajutame korrutamissõrmisele;
3) valime arvu p;
4) vajutame protsendisõrmisele;
5) loeme paneelilt tulemi.

Näited.

1. Leiame 13% arvust 400.

[C] [C] [4] [0] [0] [×] [1] [3] [%] *52*

2. Leiame 30% arvust 900.

[C] [C] [9] [0] [0] [×] [3] [0] [%] *270*

2. Suurendada arvu a p% (p sajandiku osa) võrra arvust a.

Selleks

1) valime arvu a;
2) vajutame korrutamissõrmisele;
3) valime arvu p;
4) vajutame protsendisõrmisele;
5) vajutame liitmissõrmisele;
6) vajutame vastusesõrmisele;
7) loeme paneelilt tulemi.

Näide.

Tsehhi kuuplaan oli 400 detaili. Plaan ületati 13% võrra. Mitu detaili tegelikult valmistati?
Lahenduskäigu võib lühidalt kirjutada nii: 400+13% 400-st.
Arvutil leiame tulemi järgmise skeemi kohaselt:

[C] [C] [4] [0] [0] [×] [1] [3] [%] [+] [=] *452*

3. Vähendada arvu a p% (p sajandiku osa) võrra arvust a.

Selleks

1) valime arvu a;
2) vajutame korrutamissõrmisele;
3) valime arvu p;
4) vajutame protsendisõrmisele;
5) vajutame lahutamissõrmisele;
6) vajutame vastusesõrmisele;
7) loeme paneelilt tulemi.

Näide.

Tsehhi kuuplaan oli 400 detaili. Teise dekaadi lõpuks jäi plaanist täita veel 13%. Mitu detaili valmistati kahe esimese dekaadiga?
Lahenduskäigu võib lühidalt kirjutada nii: 400 — 13% 400-st.
Arvutil leiame tulemi järgmise skeemi kohaselt:

[C] [C] [4] [0] [0] [×] [1] [3] [%] [−] [=] *348*

4. Leida arv x, kui on teada, et arv a moodustab arvust x p protsenti. Seega tuleb lahendada ülesanne, mille andmed võib kirjutada järgmiselt:

x — 100%,
a — p%.

Lahendamiseks

1) valime arvu *a;*
2) vajutame jagamissõrmisele;
3) valime arvu *p*;
4) vajutame protsendisõrmisele;
5) loeme paneelilt tulemi.

Näide.

Leida arv, kui on teada, et arv 3 moodustab sellest 5 protsenti. Arvutil leiame tulemi järgmise skeemi kohaselt:

|C| |C| |3| |÷| |5| |%| *60*

Niisiis olemegi tutvunud ühe tüüpilise neljatehtearvuti omaduste ja võimalustega. Tegelikult on mitmed taskuarvutid suuremate või väiksemate erinevustega nii andmete sisestamisvõimaluste, tehete sooritamisviiside kui ka muude üksikasjade poolest. Seepärast tuleb alati väga hoolikalt tundma õppida ja täita just selle konkreetse arvuti kasutamise juhendit, millega parajasti töötatakse.

3.11.3. MÄLUGA TASKUARVUTID.

Igal taskuarvutil on vähemalt kaks mäluseadet ehk *registrit*, millest igaüks mahutab parajasti ühe arvu. Kui arvutusi alustades vajutame numbrisõrmistele, sisestame sellega lähtearvu esimesse registrisse ehk *tabloole*. Vajutame nüüd mõnele tehtesõrmisele ning hakkame sisestama teist arvu. Kohe kaob tabloolt seal olnud esimene arv, mis viiakse arvuti ühte sisemisse registrisse ehk *puhvrisse*, ja tabloole ilmub teine arv. Vastusesõrmisele vajutades anname arvutile korralduse sooritada vastav tehe nendes registrites olevate arvudega ning paigutada tulemus tabloole. Parajasti tablool paiknev arv ongi ainuke kõikidest arvuti mälus säilitatavatest arvudest, mida saame vahetult oma silmaga näha.

Mõnel taskuarvutil on lisaks eelkirjeldatuile veel vähemalt üks register, kuhu kasutaja saab oma suva järgi arve talletada ja soovitud hetkel neid taas lugeda ning arvutuskäiku lülitada. Termin «mäluga taskuarvuti» on seega tinglik; sest mingi mälu on paratamatult igal arvutil. Spetsiaalselt *mäluks* nimetatakse aga just niisugust täiendavat registrit.

Mäluregistri olemasolu tõttu saame hõlpsamini arvutada keerukaid avaldisi võimalikult samas tehtejärjestuses nagu kirjutatud, ilma et liikmeid peaks ümber rühmitama või vahetulemusi käsitsi üles märkima.

3.11.4. ARVUTI «ELEKTROONIKA Б3-18A».

Nimetatud arvuti (samuti sellest ainult väliselt erinev «Elektroonika Б3-18M») võimaldab sooritada:

1) nelja aritmeetikatehet;
2) arvutusi naturaal- ja kümnendlogaritmide ning antilogaritmidega;
3) arvutusi trigonomeetriliste funktsioonide ja nende pöördfunktsioonidega;
4) leida juurt, astet ja pöördarvu.

Oluliseks erinevuseks arvutist «Elektroonika Б3-09M» on sõrmise **F** olemasolu, mis võimaldab igat sõrmist kasutada kahe operatsiooni sooritamiseks.

Peale aritmeetikaseadme tehete sooritamiseks on arvutil ka mälu lähteandmete, vahe- ja lõpptulemuste meelespidamiseks.

Järgnevalt vaatleme sõrmistiku kasutamist.

Sõrmiste funktsioonid.

«Elektroonika Б3-18» sõrmistik on kujutatud joonisel 3.33. Vahetult sõrmisele kirjutatud tähendus kehtib normaalrežiimil, selle kohal olev sümbol aga funktsioonirežiimil. Üleminekuks funktsioonirežiimile tuleb vajutada sõrmisele |F|.

|,| |0| |1| |2| |3| |4| |5| |6| |7| |8| |9|

Koma- ja numbrisõrmiste abil valitakse sisestatav arv tabloole.

|/—/|

Märgisõrmise abil muudetakse tablool oleva nähtarvu märk vastupidiseks.

|+| |—| |×| |÷|

Tehtesõrmiste abil realiseeritakse selleks ajaks ettevalmistatud aritmeetikatehe (kui see oli valitud). Edasi valmistatakse arvuti ette vastavalt valitud sõrmisele kas liitmiseks, lahutamiseks, korrutamiseks või jagamiseks, kusjuures üheks operandiks on tehte valimise järel tabloole ilmunud arv (s. t. kas eelmise tehte tulemus või selle puudumisel viimativalitud arv); teiseks operandiks saab pärast seda tabloole valitav arv. Kahe tehte järjestikusel valimisel läheb arvuti üle kordusrežiimile.

|=|

Vastusesõrmisega realiseeritakse selleks ajaks ettevalmistatud aritmeetikatehe, mille tulemus ilmub tabloole.
Enne järgmist tehet vastusesõrmise uuestivalimisel läheb arvuti üle kordusrežiimile.

|↔|

Registrivahetussõrmisega vahetatakse parajasti puhvris ja tablool oleva arvu asukohad.

|C| ja |CF|

Kustutussõrmise kasutamine sõltub arvuti seisundist ja arvutaja vajadustest:

1) funktsioonirežiimil |CF| või ületäite korral taastab esimene vajutus normaalrežiimi, teine vajutus kustutab nähtarvu ja kolmas puhvriarvu;
2) normaalrežiimil kustutab esimene vajutus nähtarvu ja teine puhvriarvu;
3) viimativalitud tehe annulleeritakse alles koos puhvri puhastamisega;
4) mälu puhastamiseks ei piisa üksnes kustutussõrmisest, vaid tuleb valida näiteks |C| |F| |ЗАП| .

|F|

Funktsiooni- ehk eelsõrmis tuleb valida enne ükskõik missuguse sõrmise kasutamist selle kohale märgitud tähenduses (s. t. funktsioonirežiimil).
Funktsioonirežiim katkeb automaatselt pärast järgmise sõrmise valimist, v. a. arc ja ДВ («данные восстановлены») puhul.

|F| |ДВ| |CF|

Kustutatakse viimane tabloole valitud number (koos miinusmärgiga, kui see oli valitud pärast viimast numbrit). Edasi võib jätkata nii tabloole uute numbrite juurdevalimist kui ka sooritada ükskõik millise tehte allesjäänud nähtarvuga.

|F| |π|

Tabloole tuuakse arv 3,1415926.

$$|F|\left|\frac{1}{x}\right|,\quad |F|\,|\sqrt{\ }|,\quad |F|\,|\ln|,\quad |F|\,|\lg|,\quad |F|\,|e^x|,\quad |F|\,|10^x|$$

Leitakse vastavalt kas nähtarvu pöördväärtus, ruutjuur, naturaal- või kümnendlogaritm, arvu e või kümne aste.

|a| |F| |x^y| |b| |=|

Leitakse a^b. Pärast |a| |F| |x^y| valimist leiab arvuti ln a; kui see on juba tabloole ilmunud, siis võib edasi valida |b| |=|, mille tulemusena leitakse kõigepealt $b \cdot \ln a$ ja seejärel lõplikult $e^{b \cdot \ln a} = a^b$.

|F| |sin|, |F| |cos|, |F| |tg|

Leitakse vastavalt kas nähtarvu siinus, koosinus või tangens. Argument (s. t. nähtarv) loetakse kas kraadides või radiaanides sõltuvalt lüliti ГРАД/РАД asendist.

|F| |arc| |sin|, |F| |arc| |cos|, |F| |arc| |tg|,

Leitakse vastavalt kas nähtarvu arkussiinus, arkuskoosinus või arkustangens. Vastus tuleb lugeda kas kraadides või radiaanides sõltuvalt lüliti ГРАД/РАД asendist.

F | ЗАП

Salvestussõrmisega viiakse nähtarvu väärtus mällu. Eelmine mäluarv läheb kaduma, nähtarv ise säilib.

F | ИП

Tagastussõrmisega tuuakse mäluarvu väärtus tabloole, mäluarv ise säilib.

F | x↔П

Mäluvahetussõrmisega vahetatakse mälu- ja nähtarvu asukohad.

F | П+ ja F | П−

Summa- ja vahesalvestussõrmistega nähtarv vastavalt kas liidetakse mäluarvule või lahutatakse sellest. Tulemus saab uueks mäluarvuks, nähtarv ise säilib.

F | П+x^2

Ruuduliitmissõrmisega liidetakse mäluarvule nähtarvu ruut. Tulemus saab uueks mäluarvuks, nähtarv ise säilib.

Märkus. Funktsioonide väärtuste leidmisel võib «Elektroonika Б3-18» puhul tulemuse viga olla kuni üks kuuenda koha ühik, kaasa arvatud kümnendmurru täisosa märkiv null.

Ületäide.

Ületäitega on tegemist, kui tulemi täisosa sisaldab üle 8 numbri. Sel juhul ilmub paneelile punktikujuline ületäitemärk ja kümnendmurd. Täisosa ligikaudse väärtuse leidmiseks tuleb paneelil olevat kümnendmurdu mõttes korrutada 10^8-ga. Ületäitega on tegemist ka sel juhul, kui soovitavat matemaatilist operatsiooni ei ole paneelil oleva arvuga võimalik sooritada. Sel juhul ilmub paneelile ületäitemärk ja esimese järguna 0, .

Tööks valmistumine ja töötamine arvutiga (joon. 3.33).

1. Valmistumine tööks autonoomsel toitel.

Lülitame toitelüliti (nr. 7) asendisse Вкл ja vajutame kustutussõrmisele C. Kui nüüd paneelile ilmub 0, siis on arvuti tööks valmis. Kui paneelile ilmub ÷00000000, siis tuleb kustutussõrmisele vajutada kolm korda. Nüüd ilmub paneelile 0 ja arvuti on tööks valmis.

Kui aga paneelile ilmub punktide rida, siis akumulaator on tühjenenud ja vajab laadimist või asendamist uuega.

Laadimine toimub toitebloki БП2-3 (nr. 1) abil järgmiselt:

— lülitame toitebloki ümberlüliti asendisse 3 (laadimine) (nr. 2);
— ühendame toitejuhtme pistiku arvutiga;
— lülitame lüliti (nr. 7) asendisse откл;
— ühendame toitebloki pistiku valgustusvõrku pingega 220 V.

Akumulaator laetakse 20 tunniga. Laadimise lõppedes viime toitebloki ümberlüliti (nr. 2) asendisse P (töötamine). Ühe laadimise tulemusena võib arvuti töötada kuni 3 tundi. Akumulaatorit võib laadida kuni 390 korda.

Tööd lõpetades viime toitelüliti (nr. 7) alati asendisse откл.

2. Valmistumine tööks toitebloki kaudu valgustusvõrgust pingega 220 V:

— ühendame toitejuhtme pistiku (nr. 4) arvutiga;
— viime toitebloki ümberlüliti (nr. 2) asendisse P (töötamine);
— ühendame toitebloki pistiku valgustusvõrku pingega 220 V;
— viime toitelüliti (nr. 7) asendisse Вкл;
— vajutame nüüd kustutuslülitile kas üks või kolm korda vastavalt sellele, kas paneelile ilmub 0 või ÷00000000.

Töö lõpetamise järel viime toitelüliti (nr. 7) asendisse откл, lülitame arvuti toitebloki (nr. 1) valgustusvõrgust välja ja ühendame pistiku (nr. 4) arvuti küljest lahti.

Kui teie kätte satub esmakordselt uus taskuarvuti, proovige sellel läbi kõik senikirjeldatud võtted: sisestus, tehtereeglid, ületäide. Niiviisi selgitate välja arvuti eripärasused, mis tuleb enesele selgeks teha arvutiga kaasasolevast kasutamisjuhendist ja ka proovimise teel. Üldse on kasulik soetatud taskuarvutiga eksperimenteerida, sellel kõikvõimalikke ülesandeid lahendada, kuid nii, et nende tulemuse õigsust oleks hõlbus kontrollida, näiteks tehes arvutusi hästi lihtsate arvudega.

Näited.

Liitmine ja lahutamine.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord		Tulemus paneelil
3+4+4+8=19	C		0.
	3	+	3.
	4	+	7.
		+	11.
	8	=	19.
7−2=5	7	−	7.
	2	=	5.
6,3+5,65−21,879− −5,0128+3,1= =−11,8418	6,3	+	6.3
	5,65	−	11.95
	21,879	−	−9.929
	5,0128	+	−14.9418
	3,1	=	−11.8418

Korrutamine ja jagamine.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord		Tulemus paneelil
4·5=20	4	×	4.
	5	=	20.
379,8231·0,00528 =2,0054659	379,8231	×	379.8231
	0,00528	=	2.0054659
36:3=12	36	÷	36.
	3	=	12.
145,23:12,08 =12,02235	145,23	÷	145.23
	12,08	=	12.02235

Tehted jäävate (konstantsete) suurustega.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
Jääv tegur	12 ×	12.
12·2=24	2 =	24.
3·2=6	3 =	6.
10·2=20	10 =	20.
Jääv jagaja	20 ÷	20.
20:5=4	5 =	4.
30:5=6	30 =	6.
Jääv liidetav	7 +	7.
7+3=10	3 =	10.
4+3=7	4 =	7.
Jääv vähendaja	9 −	9.
9−4=5	4 =	5.
7−4=3	7 =	3.

Mälu kasutamine liitmisel ja lahutamisel.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
3−4+6=5	3 F ЗАП	3.
	4 F П−	4.
	6 F П+	6.
	F ИП	5.
(3+5)+(2+4)=14 3+5=8 2+4=6 14	3 +	3.
	5 =	8.
	F ЗАП	8.
	2 +	2.
	4 =	6.
	F П+	6.
	F ИП	14.

Aheltehted mälu kasutamisega.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord			Tulemus paneelil
[(2+4)·5:7+3]·6 =43,714285	2	+		2.
	4	×		6.
	5	÷		30.
	7	+		4.2857142
	3	×		7.2857142
	6	=		43.714285
(2+3) (4+5) (6 — 2) =180	2	+		2.
	3	×		5.
	4	F	ЗАП	4.
	5	F	П+	5.
		F	ИП	9.
		×		45.
	6	F	ЗАП	6.
	2	F	П—	2.
		F	ИП	4.
		=		180.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord			Tulemus paneelil
2·3+5·8+12,5·2 =71	2	×		2.
2·3= 6	3	=		6.
5·8=40		F	ЗАП	6.
12,5·2=25	5	×		5.
71	8	=		40.
		F	П+	40.
	12,5	×		12.5
	2	=		25.
		F	П+	25.
		F	X↔П	71.
8·10 — 2·4+15:3+ +16²=333	8	×		8.
8·10=80	10	=		80.
—		F	ЗАП	80.
2· 4= 8	2	×		2.
+	4	=		8.
15: 3= 5		F	П—	8.
+	15	÷		15.
16² =256	3	=		5.
333		F	П+	5.
	16	F		16.
		x^y		0.772589
	2	=		256.
		F	П+	256.
		F	x↔П	333.

Pythagorase teoreem.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
On antud täisnurkne kolmnurk *ABC*, mille kaatetid on 5 cm ja 12 cm. Arvutada hüpotenuus *x*.	C F ЗАП	0.
	5 F П+x^2	5.
	12 F П+x^2	12.
	F ИП	169.
$x=\sqrt{5^2+12^2}=13$	F √	13.

Trigonomeetrilised funktsioonid.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
	Lüliti РАД/ГРАД asendisse ГРАД	
sin 30°	30 F sin	0.5
cos (— 35°)	35 /—/ F cos	0.819152
tg 210°	210 F tg	0.57735
	Lüliti РАД/ГРАД asendisse РАД	
sin 1,5 radiaani	1,5 F sin	0.997495
tg 1,1 radiaani	1,1 F tg	1.964759

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
	Lüliti РАД/ГРАД asendisse ГРАД	
arccos 0,8660254=30°	0,8660254 F arc cos	30.
arcsin 0,389=22,89229°	0,389 F arc sin	22.89229
arctg 1=45°	1 F arc tg	44.99999
arcsec 1,9051=58,33802°	1,9051 F 1/x	0.5249068
	F arc cos	58.33802

Kui soovime nurka radiaanides, siis viime lüliti asendisse РАД.

Juured ja astmed.

Ülesanne	Sõrmistele vajutamise järjekord	Tulemus paneelil
$2^8=256$	2 F x^y	0.693147
	8 =	255.9995
$\sqrt{625}=25$	625 F √	25.
$\sqrt[3]{27}=(27)^{1/3}=3$	27 F x^y	3.295836
	3 F 1/x	0.3333333
	=	2.999998
$(5{,}1)^{3{,}92}=593{,}8486$	5,1 F x^y	1.629241
	3,92 =	593.8486
$23^{-0{,}0194}=0{,}940985$	23 F x^y	3.135494
	0,0194 /—/ =	0.940985

4. ÜKSLIIGE JA HULKLIIGE. ALGEBRALINE MURD.

4.1. ALGEBRALINE AVALDIS, SELLE ARVULINE VÄÄRTUS.

Algebraline avaldis saadakse ratsionaalarvudest ja muutujatest liitmis-, lahutamis-, korrutamis-, jagamis-, astendamis- (vt. jaot. 4.3.) või juurimistehete (vt. jaot. 4.5.) abil.

Näited. $\frac{2}{3}a^2b$; $3a\sqrt{b}-(2a^3-\sqrt[3]{b})^2$; $\frac{(\sqrt{a}-b)^3}{2\sqrt{3}(a^2b+c)}$;

$3a^3-2a^2+a-5$.

Täisavaldises võib esineda liitmine, lahutamine, korrutamine, astendamine ja arvuga jagamine.

Näited. $2a^3-b^2$; $1\frac{1}{2}x^3y+0{,}4z$; $\frac{a^3-ab^2}{3}$.

Ratsionaalavaldises võib muutuja ka jagamisest osa võtta.

Näited. $\frac{a}{b}$; $\frac{a^2-b}{2a+b}$.

Algebralise avaldise arvulise väärtuse leidmisel antud muutujate väärtuste korral asendatakse muutujad neile omistatud arvuliste väärtustega ning seejärel tehakse ettenähtud tehted.

Tehete järjekord avaldise arvulise väärtuse leidmisel on järgmine:

1) astendamine ja juurimine;
2) korrutamine ja jagamine;
3) liitmine ja lahutamine.

Sama järku tehted tehakse üleskirjutise järjekorras. Kui avaldises esinevad sulud, siis tehted sulgudes tehakse kõige enne.

Näited. Arvutada järgnevate avaldiste väärtused antud muutujate väärtuste korral.

1) a^2b-c^3, kui $a=-3$; $b=2$; $c=-2$.
$a^2b-c^3=(-3)^2\cdot 2-(-2)^3=9\cdot 2-(-8)=18+8=26$.

2) $-a^2+b(12c^2-a^3)$, kui $a=3$; $b=2$; $c=-1\frac{1}{2}$.

$$-a^2+b(12c^2-a^3)=-3^2+2\cdot\left[12\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)^2-3^3\right]=$$

$$=-9+2\cdot\left(12\cdot\frac{9}{4}-27\right)=-9+2\cdot\left(\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot 9}{\underset{1}{\cancel{4}}}-27\right)=$$

$$=-9+2\cdot(27-27)=-9+2\cdot 0=-9.$$

3) $a^2b:c-b^3:c\cdot a+c^2$, kui $a=3$; $b=-6$; $c=-2$.
$a^2b:c-b^3:c\cdot a+c^2=3^2\cdot(-6):(-2)-(-6)^3:(-2)\cdot 3+$
$+(-2)^2=9\cdot(-6):(-2)-(-216):(-2)\cdot 3+4=$
$=-54:(-2)-108\cdot 3+4=27-324+4=-297+4=-293$.

4) $-x^2\sqrt{y}-(\sqrt[3]{x}-xy+\sqrt{y^3})$, kui $x=8$; $y=4$.
$-x^2\sqrt{y}-(\sqrt[3]{x}-xy+\sqrt{y^3})=-8^2\sqrt{4}-(\sqrt[3]{8}-8\cdot 4+\sqrt{4^3})=$
$=-64\cdot 2-(2-32+\sqrt{64})=-128-(2-32+8)=$
$=-128-(-30+8)=-128-(-22)-128+22=-106$.

4.2. NATURAALARVULISE ASTENDAJAGA ASTE. TEHTED ASTMETEGA.

Võrdsete tegurite korrutis kirjutatakse lühemalt astmena.

aste → a^n ← astendaja ehk astmenäitaja; $n\in\mathbf{N}$

astme alus ehk astendatav

$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ loeme nii: *a astmes neli* ehk *a neljandas astmes.* $3 \cdot 3 = 3^2$ loeme nii: 3 *astmes kaks* ehk 3 *teises astmes* ehk 3 *ruudus.*

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}} = a^n$ loeme nii: *a astmes n* ehk *a n-ndas astmes.*

On kokku lepitud, et $a^1 = a$ ja $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Astendamise reeglid.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendatakse see arv tegurite astendajate summaga.

2) $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, kus $m \geqslant n$. Ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendatakse see arv jagatava ning jagaja astendajate vahega.

3) $(a^m)^n = a^{mn}$. Arvu astme astendamisel astendatakse see arv astendajate korrutisega.

4) $(abc)^n = a^n b^n c^n$. Korrutise astendamisel mingi astendajaga astendatakse selle astendajaga iga tegur eraldi ja korrutatakse saadud astmed.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Jagatise astendamisel mingi astendajaga astendatakse selle astendajaga jagatav ning jagaja eraldi ja jagatakse saadud astmed.

Näited.

1) $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$;

2) a) $a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2$;
   b) $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0 = 1$;

3) $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$;

4) $\left(\frac{1}{2} a^3 b^2 c\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot c^3 = \frac{1}{8} a^9 b^6 c^3$;

5) $\left(\frac{2a^2}{3}\right)^4 = \frac{2^4 (a^2)^4}{3^4} = \frac{16a^8}{81}$.

6) $a^{2m-5} \cdot a^{m+3} = a^{2m-5+m+3} = a^{3m-2}$.

7) $(a^{3m-2} \cdot b^2) : (a^{2m-4} \cdot b^{m-1}) =$
$= a^{3m-2-(2m-4)} \cdot b^{2-(m-1)} =$
$= a^{3m-2-2m+4} \cdot b^{2-m+1} = a^{m+2} \cdot b^{3-m}$.

Mõnel juhul on otstarbekas toodud reegleid kasutada vastassuunas.

8) $4^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^5 = \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{\overset{1}{4} \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot \underset{1}{2}}\right)^5 =$
$= 3^5 = 243$;

9) $5^4 : \left(2\frac{1}{2}\right)^4 = \left(5 : 2\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{\overset{1}{5} \cdot 2}{\underset{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16$.

4.3. NEGATIIVSE ASTENDAJAGA ASTE.

Negatiivse astendajaga aste tähendab murdu, mille lugejaks on arv 1 ja nimetajaks sama aste positiivse astendajaga.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, kus $a \neq 0$ ja $n \in \mathbf{N}$.

Tehete korral negatiivsete astendajatega astmetega kehtivad samad reeglid, mis tehete korral naturaalarvulise astendajaga astmetega.

Näited.

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; 2) $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$;

3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$;

4) $3^{-3}\cdot 3^4=3^{-3+4}=3$;

5) $5^{-2}:5^{-4}=5^{-2-(-4)}=5^2=25$;

6) $a^{2m-1}:a^{3m+2}=a^{2m-1-3m-2}=a^{-m-3}$;

7) $(a^{-3})^{-2}=a^{-3\cdot(-2)}=a^6$; 8) $(a^3b^{n-1})^{-n}=a^{-3n}\cdot b^{-n^2+n}$;

Ülesannete lahendamisel on otstarbekas kasutada negatiivse astendajaga astme definitsioonile põhinevaid teisendusi:

1) Murru lugeja ja nimetaja vahetamisel muutub murru astendaja märk vastupidiseks.

Näited. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$;

2) Teguri viimisel murru lugejast nimetajasse või vastupidi muutub teguri astendaja märk vastupidiseks.

$$\frac{2a^{-2}b^3c^{-5}}{3^{-2}a^3b^{-1}d^{-3}}=\frac{2\cdot 3^2b^3bd^3}{a^3a^2c^5}=\frac{18b^4d^3}{a^5c^5};$$

$$\frac{3{,}2}{80\cdot 10^4}=0{,}04\cdot 10^{-4}=4\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}=4\cdot 10^{-6}.$$

4.4. JUUR. TEHTED JUURTEGA.

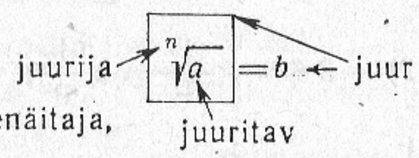
Ruutjuureks mittenegatiivsest arvust a nimetatakse sellist mittenegatiivset arvu b, mille ruut on a.

$\sqrt{a}=b$ nii, et $b^2=a$, kus $a\geqslant 0$ ja $b\geqslant 0$;

$\sqrt{0}=0$ nii, et $0^2=0$.

Antud mittenegatiivse arvu a n-ndaks juureks nimetatakse sellist mittenegatiivset arvu b, mille n-es aste on a.

Paarituarvulise juurijaga juureks negatiivsest arvust nimetatakse sellist negatiivset arvu, mille astendamisel juurijaga saadakse juuritav arv.



ehk juurenäitaja, $n\in N$,

$\sqrt[n]{a}=b$, kui $b^n=a$ ehk $(\sqrt[n]{a})^n=a$; kus $a\geqslant 0$ ja $b\geqslant 0$.

Näited.

1) $\sqrt{9}=3$, sest $3^2=9$ ehk $(\sqrt{9})^2=9$;

2) $\sqrt[3]{8}=2$, sest $2^3=8$ ehk $(\sqrt[3]{8})^3=8$;

3) $\sqrt[4]{81a^8b^{12}}=3a^2b^3$, sest $(3a^2b^3)^4=81a^8b^{12}$ ehk $(\sqrt[4]{81a^8b^{12}})^4=81a^6b^{12}$;

4) $\sqrt{a^2}=|a|$, s. t. $\sqrt{a^2}=a$, kui $a\geqslant 0$ ja $\sqrt{a^2}=-a$, kui $a<0$;

5) $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=-(-5)=5$;

6) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$, s. t. $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$, kui $a\geqslant b$ ja $\sqrt{(a-b)^2}=-(a-b)=-a+b$, kui $a<b$;

7) $\sqrt[3]{-8}=-2$, sest $(-2)^3=-8$.

Märkus. Näites 3) ja järgnevates näidetes vaadeldakse muutujaid mittenegatiivsetena, et vältida ülemäära kohmakaid absoluutväärtuse märki sisaldavaid avaldisi.

Juurimise reeglid.

1)	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.	Korrutise juur võrdub tegurite juurte korrutisega.
2)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.	Jagatise juur võrdub jagatava ja jagaja juurte jagatisega.
3)	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.	Juure astendamisel astendame juuritavat ja tulemust juurime.
4)	$\sqrt[n]{a}=\sqrt[kn]{a^k}$.	Juure väärtus ei muutu, kui juurijat ja juuritava astendajat korrutada ühe ja sama positiivse täisarvuga.
5)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.	Juure juurimisel juuritakse juuritavat juurijate korrutisega.

Märkus. Kõik nimetatud reeglid on rakendatavad ka vastupidises suunas.

Näited.

1) $\sqrt{25\cdot 36}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}=5\cdot 6=30$;

2) $\sqrt{\frac{49a^2}{16}}=\frac{\sqrt{49}\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt{16}}=\frac{7a}{4}$, kui $a\geqslant 0$;

3) $(\sqrt[3]{4})^6=\sqrt[3]{4^6}=\sqrt[3]{4096}=16$;

4) $\sqrt{\frac{1}{27}\cdot\sqrt{243}}=\sqrt{\frac{1}{27}\cdot 243}=\sqrt{9}=3$;

5) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}:\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}:16}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$;

6) $\sqrt{2a^2b^4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^4}=\sqrt{2}\cdot a\cdot b^2=ab^2\sqrt{2}$, kui $a\geqslant 0$.

7) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$;

8) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[12]{a^{17}}=a\sqrt[12]{a^5}$;

9) $\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt[6]{a^4b^2}}{\sqrt[6]{a^3b^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{a^3b^3}}=\sqrt[6]{\frac{a}{b}}$;

10) $\sqrt[6]{8a^6b^3}=\sqrt[6]{2^3a^6b^3}=\sqrt{2a^2b}=a\sqrt{2b}$;

11) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25a^4b^8}}=\sqrt[12]{5^2a^4b^8}=\sqrt[6]{5a^2b^4}$;

12) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{2a^3b^2}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{10}\cdot 2a^3b^2}}=\sqrt[15]{2a^{13}b^2}$;

4.5. MURRULISE ASTENDAJAGA ASTE.

Mingi arvu **murrulise astendajaga aste** on juur, kus murrulise astendaja nimetaja on juurijaks ja lugeja selle arvu astendajaks juuritavas.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Tehetes murrulise astendajaga astmetega kehtivad artiklis 4.2. toodud reeglid tehete kohta astmetega.

Näited.

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}=a^{1\frac{1}{6}}$;

2) $a^{\frac{1}{3}}:a^{-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{12}}$;

3) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}=a^{-\frac{2}{3}\cdot(-6)}=a^4$;

4) $\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{6}}\right)^{12}=a^{-6}b^4c^{-2}$.

Murrulise astendajaga astme võime kirjutada kasutades juurimismärki ja vastupidi, juure murrulise astendaja abil.

Näited.

1) $a^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$;

2) $\sqrt[3]{3a^2b^5c}=3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

Kui murrulise astendajaga astme alus on ise mingi arvu aste, siis on tihti otstarbekas lihtsustamiseks see esitada astme kujul.

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{(2^4)^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8, \quad \text{ehk}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}=2^{-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^3=8.$$

4.6. ÜKSLIIGE JA HULKLIIGE.

Üksliige saadakse ratsionaalarvudest ja muutujatest ainult korrutamistehte abil.

Näited. $2a^2$; $\frac{2}{3}a^3b$; $-3ab^2$; 4; $\frac{2xy}{5}$.

Muutujad võivad olla astendatud naturaalarvulise astendajaga.

Hulkliikmeks nimetatakse üksliikmete algebralist summat.

Näited: $x^2y-\frac{1}{2}x+3$; $2ab-c^2$; x^3+3x^2+3x+1.

4.7. SARNASED ÜKSLIIKMED, NENDE KOONDAMINE.

Sarnasteks liikmeteks nimetatakse neid üksliikmeid, mis üksteisest ei erine või erinevad ainult kordajate poolest.

Üksliikmete koondamine on hulkliikme lihtsustamine sarnaste liikmete liitmise teel.

Näide. $\underline{5a^2b}-\underline{\underline{2ab^2}}+3b^3-\underline{2a^2b}-b^3+\underline{\underline{5ab^2}}-\underline{a^2b}-\underline{\underline{4ab^2}}=$
$=2a^2b-ab^2+2b^3.$

Näites on sarnasteks liikmeteks $5a^2b$, $-2a^2b$ ja $-a^2b$; $-2ab^2$, $5ab^2$ ja $-4ab^2$; $3b^3$ ja $-b^3$.

4.8. TEHTED ÜKSLIIKMETEGA. HULKLIIKMETE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Üksliikmete korrutamisel korrutatakse nende kordajad ja neis esinevate muutujate astmed.

Näited. 1) $2a^2b\cdot(-5a^3b^2c)=-2\cdot5\cdot a^2\cdot a^3\cdot b\cdot b^2\cdot c=$
$=-10a^5b^3c;$

2) $\frac{1}{2}ab^2\cdot(-6a^3b^4)\cdot(-2a^4b)=6a^8b^7.$

Üksliikmete jagamisel jagatakse nende kordajad ja neis esinevate muutujate astmed.

Näited.

1) $-5a^4b^3c:2a^2bc=-2\frac{1}{2}a^2b^2;$

2) $3x^5y^3:\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)=-6x^4y.$

Hulkliikmete liitmisel kirjutame teise hulkliikme liikmed esimese hulkliikme liikmete järele ning koondame saadud hulkliikme.

Näide. $(2a^2+5a-3)+(a^2-a+7)=$
$=2a^2+5a-3+a^2-a+7=3a^2+4a+4.$

Hulkliikmete lahutamisel kirjutame teise hulkliikme liikmed esimese hulkliikme liikmete järele vastandmärkidega ja koondame saadud hulkliikme.

Näide. $(3a^3-2a+4)-(a^3-2a^2+5a-2)=$
$=3a^3-2a+4-a^3+2a^2-5a+2=2a^3+2a^2-7a+6.$

4.9. HULKLIIKMETE KORRUTAMINE JA JAGAMINE ÜKSLIIKMEGA.

Hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutame selle üksliikmega hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Näide. $(2a^3-3a+2)\cdot(-3a^2)=2a^3\cdot(-3a^2)-3a\cdot(-3a^2)+$
$+2\cdot(-3a^2)=-6a^5+9a^3-6a^2.$

Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagame selle üksliikmega hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Näide. $(2a^5-3a^3+4a^2):\left(-\frac{1}{3}a^2\right)=$

$=2a^5:\left(-\frac{1}{3}a^2\right)-3a^3:\left(-\frac{1}{3}a^2\right)+4a^2:\left(-\frac{1}{3}a^2\right)=$

$=-6a^3+9a-12.$

4.10. HULKLIIKMETE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

Hulkliikme korrutamisel hulkliikmega korrutame ühe hulkliikme iga liiget teise hulkliikme iga liikmega ja tulemused liidame. Enne hulkliikmete korrutamist on soovitatav korrastada hulkliikmed muutuja astendajate kahanemise järjekorras.

Näited. $(2x^2-3x)(x+2)=2x^3-3x^2+4x^2-6x=$

$=2x^3+x^2-6x.$

2) $(a^2+2a-3)(2a^2-3a+2)=$

$=2a^4+4a^3-6a^2-3a^3-6a^2+9a+2a^2+4a-6=$

$=2a^4+a^3-10a^2+13a-6.$

Hulkliikme jagamisel hulkliikmega leiame sellise hulkliikme, mille korrutis jagajaga annab tulemuseks jagatava.

Näited.

1)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-6x & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3+4x^2} & 2x^2-3x \\ -3x^2-6x & \\ \underline{-3x^2-6x} & \\ \hline\hline \end{array}$$

Jagatava ja jagaja pealiikmete järgi otsustame, et jagatise pealiige on $2x^2$ (selleks teostame jagamise $2x^3:x$). Märgime selle jagatise ja korrutame sellega jagajat, kirjutades korrutise jagatava vastavate liikmete alla. Lahutame jagatavast saadud korrutise ja toome alla järgmise liikme. Pealiikmete jagatise $(-3x^2:x)$ järgi leiame, et jagatise järgmine liige on $-3x$. Märgime selle jagatisse ja korrutame sellega jagajat, kirjutades korrutise jagatava vastavate liikmete alla. Lahutamisel saame tulemuseks 0, järelikult toimus jagamine jäägita.

2)
$$\begin{array}{r|l} 2a^4+a^3-10a^2+13a-6 & a^2+2a-3 \\ \cline{2-2} \underline{2a^4+4a^3-6a^2} & 2a^2-3a+2 \\ -3a^3-4a^2+13a & \\ \underline{-3a^3-6a^2+9a} & \\ 2a^2+4a-6 & \\ \underline{2a^2+4a-6} & \\ \hline\hline \end{array}$$

4.11. KORRUTAMISE ABIVALEMID.

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

Kahe arvu summa ja vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega.

2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

Kahe arvu summa ruut võrdub esimese arvu ruuduga, pluss kahekordne esimese ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

Kahe arvu vahe ruut võrdub esimese arvu ruuduga, miinus kahekordne esimese ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

Kahe arvu summa kuup võrdub esimese arvu kuubiga, pluss kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, pluss teise arvu kuup.

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Kahe arvu vahe kuup võrdub esimese arvu kuubiga, miinus kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, miinus teise arvu kuup.

6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe mittetäieliku ruudu korrutis võrdub nende arvude kuupide summaga.

7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Kahe arvu vahe ja samade arvude summa mittetäieliku ruudu korrutis võrdub nende arvude kuupide vahega.

Näited. 1) $(0{,}1a+3b^2)(0{,}1a-3b^2)=(0{,}1a)^2-(3b^2)^2=$
$=0{,}01a^2-9b^4$;

2) $\left(6a^2+\frac{1}{2}a\right)^2=(6a^2)^2+2\cdot 6a^2\cdot\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=$
$=36a^4+6a^3+\frac{1}{4}a^2$;

3) $(2a-3a^2)^3=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 3a^2+$
$+3\cdot 2a\cdot(3a^2)^2-(3a^2)^3=$
$=8a^3-3\cdot 4a^2\cdot 3a^2+3\cdot 2a\cdot 9a^4-27a^6=$
$=8a^3-36a^4+54a^5-27a^6$;

4) $\left(\frac{1}{2}a-3b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}ab+9b^2\right)=\left(\frac{1}{2}a\right)^3-(3b)^3=$
$=\frac{1}{8}a^3-27b^3$.

4.12. HULKLIIKME LAHUTAMINE TEGURITEKS.

Hulkliikme tegureiks lahutamiseks nimetatakse hulkliikme teisendamist korrutiseks, mille teguriteks võivad olla nii hulkliikmed kui ka üksliikmed.

Teguriteks lahutamise õigsust kontrollime sulgude avamisega (korrutamisega).

Hulkliikme teguriteks lahutamise võtted.

1. Hulkliikme tegureiks lahutamisel ühise teguri sulgude ette toomisega

1) leiame hulkliikme kõigi liikmete suurima ühisteguri ja kirjutame selle sulgude ette;

2) sulgudesse kirjutame teise teguri, milleks on antud hulkliikme ja sulgude ette toodud teguri jagatis.

Näide. $18a^3b^4-6a^2b+48a^2b^3=6a^2b(3ab^3-1+8b^2)$.

2. Hulkliikme tegureiks lahutamisel valemite abil kasutame korrutamise valemeid (vt. jaot. 4.11.).

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$;
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

Näited. a) $0{,}01a^4-4b^2=(0{,}1a^2+2b)(0{,}1a^2-2b)$;
b) $4a^2+12ab+9b^2=(2a+3b)^2$;
c) $9x^2-30xy^2+25y^4=(3x-5y^2)^2$;
d) $\frac{1}{8}a^3+1\frac{1}{2}a^2b+6ab^2+8b^3=\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^3$;
e) $27a^6-27a^4b+9a^2b^2-b^3=(3a^2-b)^3$;
f) $0{,}008x^3+125y^3=(0{,}2x+5y)(0{,}04x^2-xy+25y^2)$;
g) $64x^3y^6-z^6=(4xy^2-z^2)(16x^2y^4+4xy^2z^2+z^4)$.

3. Hulkliikmete tegureiks lahutamisel rühmitamisvõttega rühmitame hulkliikme liikmed nii, et igas rühmas oleks pärast rühma liikmete ühise teguri sulgude ette toomist sulgudes selline tegur, mida saab hiljem omakorda kõigist rühmadest ühise tegurina sulgude ette tuua.

Näide. $a^3-a^2b+a^2-ab-a+b=$
$=(a^3-a^2b)+(a^2-ab)-(a-b)=$
$=a^2(a-b)+a(a-b)-(a-b)=$
$=(a-b)\cdot(a^2+a-1)$.

Sama avaldist saab teguriteks lahutada ka nii, et rühmitame liikmeid kolmekaupa.

$a^3-a^2b+a^2-ab-a+b=(a^3+a^2-a)-(a^2b+ab-b)=$
$=a(a^2+a-1)-b(a^2+a-1)=(a^2+a-1)(a-b)$.

4. Hulkliikme tegureiks lahutamise kombineeritud võtteid.

Eespool toodud hulkliikmete tegureiks lahutamise võtteid võib kasutada kombineeritult.

Näited. a) $4a^5b-4a^3b^2+ab^3=ab(4a^4-4a^2b+b^2)=$
$=ab(2a^2-b)^2$;

b) $b^3-4b^2+4b-1=(b^3-1)-(4b^2-4b)=$
$=(b-1)(b^2+b+1)-4b(b-1)=$
$=(b-1)(b^2+b+1-4b)=(b-1)(b^2-3b+1)$;

c) $2a^2-2ab-a^3+a^2b-a+b=$
$=2a(a-b)-a^2(a-b)-(a-b)=$
$=(a-b)(2a-a^2-1)=$
$=-(a-b)(a^2-2a+1)=-(a-b)(a-1)^2$.

4.13. ALGEBRALINE MURD, SELLE PÕHIOMADUS.

Algebraliseks murruks nimetatakse avaldist $\frac{a}{b}$, kus a ja b on mingid täisavaldised.

Murd $\frac{a}{b}$; a — lugeja — mistahes algebraline täisavaldis
b — nimetaja — nullist erinev muutujat sisaldav täisavaldis

Näited. $\frac{2a}{3b^2c}$ $(b\neq0;\ c\neq0)$;

$\frac{a^2}{2bc^3(a-b)}$ $(b\neq0;\ c\neq0;\ a\neq b)$.

Murrul puudub mõte, kui murru nimetaja on null.

Ühe muutujaga ratsionaalavaldise määramispiirkonnaks nimetatakse muutuja kõigi nende väärtuste hulka, mille puhul saab arvutada avaldise väärtuse.

Näited. $\frac{2a}{a-3}$; määramispiirkonda ei kuulu $a=3$;

$\frac{x+2}{2x^2-4x}$, määramispiirkonda ei kuulu $x=0$ ja $x=2$.

Algebralise murru põhiomadus.

Murru lugeja ja nimetaja korrutamisel või jagamisel täisavaldisega tekib murd, mis on võrdne esialgse murruga kõikjal, kus ta on määratud ja kus see täisavaldis ei ole null:

1) murru laiendamisel $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, kus $m\neq0$;

2) murru taandamisel: $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$; kus $m\neq0$.

1. Murru laiendamist kasutatakse murdude ühenimeliseks teisendamisel.

Näited. a) $\frac{a}{bc^2}$ ja $\frac{2b}{ac}$; $\frac{a^2}{abc^2}$ ja $\frac{2b^2c}{abc^2}$;

b) $\frac{2a}{a^2-b^2}$ ja $\frac{b}{(a-b)^2}$;

$\frac{2a}{(a+b)(a-b)}$ ja $\frac{b}{(a-b)^2}$;

$\frac{2a^2-2ab}{(a+b)(a-b)^2}$ ja $\frac{ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$.

2. Murru taandamist kasutatakse murru lihtsustamisel. Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis murru taandamiseks lahutame murru lugeja ja nimetaja tegureiks ning taandame murdu, jagades lugejat ja nimetajat nende ühise teguriga.

Näited. a) $\frac{2a^3b}{6ab^4}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\,\overset{2}{\cancel{a}}\,\overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{3}{\cancel{6}}\,\underset{1}{\cancel{a}}\,\underset{3}{\cancel{b^4}}}=\frac{a^2}{3b^3}$;

b) $\dfrac{a^2b^3(a^2-4)}{3a^2b\,(a^2+4a+4)}=\dfrac{a^{\overset{1}{2}}b^{\overset{2}{3}}(a+2)^{\overset{1}{1}}(a-2)}{3a^{\overset{1}{2}}b^{\overset{1}{1}}(a+2)^{\overset{2}{2}}}=$

$=\dfrac{b^2(a-2)}{3(a+2)}$

Selleks et muuta märki murru ees, võib muuta märgi kas lugejas või nimetajas.

Näited. 1) $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$; 2) $-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{2}{3-x}$;

3) $-\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{b-a}{c}$.

Muutes märgi murru lugejas ja nimetajas, saame murru, mis on võrdne esialgsega.

Näited.

1) $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$; 2) $\dfrac{3-a}{2-b}=\dfrac{a-3}{b-2}$; 3) $\dfrac{-3}{4-x^2}=\dfrac{3}{x^2-4}$.

4.14. TEHTED ALGEBRALISTE MURDUDEGA.

Algebraliste murdudega arvutamisel kehtivad samad reeglid, mis harilike murdudega arvutamisel.

Ühenimeliste murdude liitmine ja lahutamine.

Näited.

1) $\dfrac{3a}{2a^2b}-\dfrac{2b}{2a^2b}=\dfrac{3a-2b}{2a^2b}$;

2) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{a-(a+b)}{a-b}=\dfrac{a-a-b}{a-b}=$

$=\dfrac{-b}{a-b}=\dfrac{b}{b-a}$;

3) $\dfrac{2x}{x-y}+\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{2x}{x-y}+\dfrac{x+y}{-(x-y)}=$

$=\dfrac{2x}{x-y}-\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2x-(x+y)}{x-y}=$

$=\dfrac{2x-x-y}{x-y}=\dfrac{\overset{1}{\cancel{x-y}}}{\underset{1}{\cancel{x-y}}}=1.$

Isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine.

Murdude liitmisel ja lahutamisel toimime järgmiselt.

1. Leiame kõigi murdude ühise nimetaja. Selleks lahutame kõigi murdude nimetajad tegureiks ja leiame nimetajate vähima ühiskordse, s.t. vähima avaldise, mis jagub kõigi murdude nimetajatega. Saadud avaldis ongi antud murdude ühiseks nimetajaks.

2. Leiame igale murrule laiendaja. Selleks jagame leitud ühise nimetaja iga murru nimetajaga ja kirjutame vastava jagatise selle murru lugeja kohale kaare sisse.

3. Laiendame iga murdu vastava laiendajaga ja liidame (lahutame) laiendatud murrud.

4. Võimaluse korral lahutame saadud murru lugeja tegureiks ja taandame murdu.

Näited. 1) $\dfrac{2a+b}{4ab}-\dfrac{a+b}{2b^2}=\dfrac{b(2a+b)-2a(a+b)}{2ab^2}=$

$=\dfrac{\cancel{2ab}+b^2-2a^2-\cancel{2ab}}{4ab^2}=\dfrac{b^2-2a^2}{4ab^2}$.

Nimetajate $4ab$ ja $2b^2$ vähima ühiskordse leidmiseks moodustame korrutise, kuhu kuuluvad kõik esimese nimetaja tegurid ja teisest nimetajast lisaks tegur b. $V(4ab;\ 2b^2)=4ab\cdot b=4ab^2$.

2) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x^2+3}{2-2x^2}+\frac{2x-3}{x+1}=$

$=\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}+\frac{2x-3}{x+1}=$

$=\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x^2+3}{2(x+1)(x-1)}+\frac{2x-3}{x+1}=$

$=\frac{(x+1)(x+1)-(x^2+3)+(2x-3)(2x-2)}{2(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{x^2+2x+1-x^2-3+4x^2-6x-4x+6}{2(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{4x^2-8x+4}{2(x+1)(x-1)}=\frac{4(x-1)^2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x+1}$

3) $\frac{a}{a^2-9b^2}-\frac{1}{2a-6b}=\frac{a}{(a+3b)(a-3b)}-\frac{1}{2(a-3b)}=$

$=\frac{2a-a-3b}{2(a+3b)(a-3b)}=\frac{a-3b}{2(a+3b)(a-3b)}=\frac{1}{2(a+3b)}$

4) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}+\frac{2a^3}{1-a^4}=$

$=\frac{a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a-1}{a^2(a-1)+(a-1)}+$

$+\frac{a^2-a-1}{a^2(a+1)+(a+1)}-\frac{2a^3}{(a^2+1)(a^2-1)}=$

$=\frac{a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a-1}{(a-1)(a^2+1)}+$

$+\frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)}-\frac{2a^3}{(a^2+1)(a+1)(a-1)}=$

$=\frac{a^3+a+a^3+a^2-a+a^2+a-1+a^3-a^2-a-a^2+a+1-2a^3}{(a^2+1)(a+1)(a-1)}=$

$=\frac{a^3+a}{(a^2+1)(a+1)(a-1)}=\frac{a(a^2+1)}{(a^2+1)(a+1)(a-1)}=\frac{a}{a^2-1}$

Murdude korrutamine ja jagamine.

Murdude korrutamisel korrutame ühisel murrujoonel eraldi murdude lugejad ja nimetajad ning võimaluse korral taandame murdu.

Näited. 1) $\frac{6a^3b}{5cd^4}\cdot\frac{15cd^2}{9ab^3}=\frac{2\,a^2\,1\,3\,1\,1}{5\,c\,d^{4\,2}\cdot 3\,a\,b^{3\,2}}=\frac{2a^2}{b^2d^2}$;

2) $(a^3-4ab^2)\cdot\frac{a^2}{2b^2-ab}=\frac{a(a+2b)(a-2b)\cdot a^2}{b(2b-a)}=$

$=-\frac{a^3(a+2b)(a-2b)}{b(a-2b)}=-\frac{a^3(a+2b)}{b}$;

3) $\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{3y^3}{x}\cdot\frac{5y}{12x}=\frac{1\;1\;1\;\;1}{2x^2\cdot 3y^3\cdot 5y}{y\cdot x\cdot 12x}=\frac{5y^3}{2}=\frac{5}{2}y^3=2\frac{1}{2}y^3$.

Kahe murru jagamisel korrutame jagatavat murdu jagaja pöördavaldisega, s. t. jagatava lugejat korrutame jagaja nimetajaga ja jagatava nimetavat korrutame jagaja lugejaga ning tulemused jagame. Võimaluse korral taandame saadud murdu.

Näited. 1) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2} : \dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{ab-b^2} =$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(a+b)}}\,\overset{1}{\cancel{(a^2-ab+b^2)}}\,b\,\overset{1}{\cancel{(a-b)}}}{\underset{1}{\cancel{(a+b)}}\,\underset{1}{\cancel{(a-b)}}\,a\,\cancel{(a^2-ab+b^2)}} = \frac{b}{a};$$

2) $$\frac{24a^2b^4}{5cd^2} : 8ab^3c = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}\,a^{\cancel{2}}\,\overset{1}{b^{\cancel{4}}}}{5c\,d^{\cancel{2}}\,\underset{1}{\cancel{8}}\,\underset{1}{\cancel{a}}\,\underset{1}{\cancel{b^3}}\,c} = \frac{3ab}{5c^2d^2};$$

3) $$(9x^4+6x^2y+y^2) : \frac{y^2-9x^4}{x+y} = \frac{(3x^2+y)^{\cancel{2}}(x+y)}{\underset{1}{\cancel{(y+3x^2)}}\,(y-3x^2)} =$$

$$= \frac{(3x^2+y)(x+y)}{y-3x^2}$$

Näide kõigi tehete kohta murdudega.

$$\left(\frac{a+b}{2b+a} + \frac{a}{b-a} - \frac{a^2-4b^2}{a-b} \cdot \frac{a}{a^2+4ab+4b^2}\right) \cdot \frac{a^4-b^4}{a^3+8b^3} =$$

$$= \left(\frac{\overset{(a-b}{a+b}}{2b+a} - \frac{\overset{(a+2b}{a}}{a-b} - \frac{1}{\underset{1}{\cancel{(a+2b)}}\,(a-2b)\,\overset{1}{a}}\right) \cdot \frac{a^4-b^4}{a^3+8b^3} =$$

$$= \frac{\cancel{a^2}-b^2-\cancel{a^2}-\cancel{2ab}-a^2+\cancel{2ab}}{(a+2b)(a-b)} : \frac{a^4-b^4}{a^3+8b^3} =$$

$$= \frac{-\underset{1}{\cancel{(a^2+b^2)}}\,\underset{1}{\cancel{(a+2b)}}\,(a^2-2ab+4b^2)}{\underset{1}{\cancel{(a+2b)}}\,(a-b)\,\underset{1}{\cancel{(a^2+b^2)}}\,(a^2-b^2)} = \frac{-a^2+2ab-4b^2}{(a-b)^2(a+b)}$$

Esimese tehtena teostame sulgudes korrutamise ja ühtlasi muudame teise murru nimetajas märki, et hõlbustada ühise nimetaja leidmist. Teiseks tehteks on sulgudes murdude liitmine, milleks leiame ühise nimetaja ja määrame laiendajad. Kolmandaks tehteks on saadud murru jagamine. Jagamisel (ühisel murrujoonel) lahutame lugeja ja nimetaja tegureiks ning taandame.

4.15. JUURAVALDISTE TEISENDAMINE.

4.15.1. ERINEVATE JUURIJATEGA JUURTE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

Erinevate juurijatega juurte korrutamisel ja jagamisel teisendatakse juured ühenimelisteks. (art. 4.4., reegel 4.) Sama tehte võib teostada kasutades murrulisi astendajaid.

Näited.

1) $\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^7} = \sqrt[24]{a^9} \cdot \sqrt[24]{a^{14}} = \sqrt[24]{a^9a^{14}} = \sqrt[24]{a^{23}}$, ehk

$$\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^7} = a^{\frac{3}{8}} \cdot a^{\frac{7}{12}} = a^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = a^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{a^{23}}.$$

2) $\sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{a^4b^3} = \sqrt[12]{(a^4b)^4 \cdot (ab^3)^3 \cdot (a^4b^3)^2} =$

$$= \sqrt[12]{a^{16}b^4a^3b^9a^8b^6} = \sqrt[12]{a^{27}b^{19}} = a^2b\sqrt[12]{a^3b^7}, \text{ ehk}$$

$$\sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{a^4b^3} = a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}a^{\frac{4}{6}}b^{\frac{3}{6}} =$$

$$= a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}+\frac{4}{6}}b^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{6}} = a^{\frac{27}{12}}b^{\frac{19}{12}} =$$

$$= a^{2\frac{3}{12}}b^{1\frac{7}{12}} = a^2\sqrt[12]{a^3} \cdot b\sqrt[12]{b^7} = a^2b\sqrt[12]{a^3b^7}.$$

3) $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[4]{a^{-3}} = \sqrt[12]{(a^5)^2} : \sqrt[12]{(a^{-3})^3} = \sqrt[12]{a^{10}:a^{-9}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a\sqrt[12]{a^7}$, ehk

$$\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[4]{a^{-3}} = a^{\frac{5}{6}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{4}\right)} =$$

$$= a^{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{19}{12}} = a^{1\frac{7}{12}} = a\sqrt[12]{a^7}.$$

4.15.2. JUURAVALDISTE KOONDAMINE.

Sarnasteks juurteks nimetatakse juuri, mis üksteisest ei erine, või erinevad ainult juuremärgi ees oleva kordaja poolest.

Juuri sisaldavas hulkliikmes teisendatakse võimaluse korral juured sarnasteks juurteks ja koondatakse need.

Näited.

1) $5\sqrt{1\frac{1}{3}}-2\sqrt{27}+\frac{1}{3}\sqrt{75}-\sqrt{12{,}5}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}+\sqrt{242}=$

$=5\sqrt{\frac{4\cdot3}{3\cdot3}}-2\sqrt{3\cdot9}+\frac{1}{3}\sqrt{3\cdot25}-\sqrt{\frac{25\cdot2}{2\cdot2}}+6\sqrt{\frac{9\cdot2}{2\cdot2}}+$

$+\sqrt{2\cdot121}=\frac{5\cdot2}{3}\sqrt{3}-2\cdot3\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+$

$+\frac{6\cdot3}{4}\sqrt{2}+11\sqrt{2}=\frac{10}{3}\sqrt{3}-6\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{3}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{9}{2}\sqrt{2}+$

$+11\sqrt{2}=-\sqrt{3}+13\sqrt{2}.$

2) $6xy\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2}}+\frac{1}{2}y\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-\frac{3}{2x}\sqrt[3]{-x^4y}=$

$=6xy\sqrt[3]{\frac{1\cdot xy}{x^2y^2xy}}+\frac{1}{2}y\sqrt[3]{\frac{xy}{y^2y}}-\frac{3}{2x}\sqrt[3]{-x^3xy}=$

$=\frac{6xy}{xy}\sqrt[3]{xy}+\frac{y}{2y}\sqrt[3]{xy}-\frac{3\cdot(-x)}{2x}\sqrt[3]{xy}=$

$=6\sqrt[3]{xy}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{xy}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{xy}=8\sqrt[3]{xy}.$

3) $\left(13\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}\right)(\sqrt{2}-\sqrt{3})=13\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+$

$+\frac{1}{2}\sqrt{128}\cdot\sqrt{2}-6\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}-13\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{128}\cdot\sqrt{3}+$

$+6\sqrt{18}\cdot\sqrt{3}=13\sqrt{4}+\frac{1}{2}\sqrt{256}-6\sqrt{36}-13\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{64\cdot6}+$

$+6\sqrt{18\cdot3}=13\cdot2+\frac{1}{2}\cdot16-6\cdot6-13\sqrt{6}-\frac{1}{2}\cdot8\sqrt{6}+6\cdot3\sqrt{6}=$

$=26+8-36-13\sqrt{6}-4\sqrt{6}+18\sqrt{6}=\sqrt{6}-2.$

4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2=$

$\frac{1}{4}\cdot8-\sqrt{8\cdot6}+6=2-\sqrt{16\cdot3}+6=8-4\sqrt{3}.$

Murru nimetaja vabastamisel irratsionaalsusest leitakse väikseim selline avaldis, millega murru lugejat ja nimetajat korrutades jääb nimetajasse juurevaba avaldis.

Näited.

1) $\frac{10}{\sqrt{2}}=\frac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2};$

2) $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}=\frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}}=\frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{5\sqrt[3]{9}}{3};$

3) $\frac{6a}{\sqrt[3]{2a^2b}}=\frac{6a\cdot\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{2a^2b}\cdot\sqrt[3]{4ab^2}}=\frac{6a\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{8a^3b^3}}=\frac{6a\sqrt[3]{4ab^2}}{2ab}=$

$=\frac{3\sqrt[3]{4ab^2}}{b};$

4) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}=\frac{6\cdot(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)\cdot(3\sqrt{2}-4)}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2}=$

$=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{9\cdot2-16}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{18-16}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{2}=$

$=3(3\sqrt{2}-4);$

5) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{15\ (5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})\ (5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}=$

$=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2}=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{25\cdot3-9\cdot5}=$

$=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{75-45}=\frac{^{1}\cancel{15}(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{\cancel{30}_{2}}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$

4.15.4. AVALDISE VÄÄRTUSE ARVUTAMISE NÄITEID.

1) $16^{0,75}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}-0{,}25^{-2}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=$

$=(2^4)^{0,75}+(2^{-4})^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+1\cdot(3^{-3})^{-\frac{2}{3}}=$

$=2^3+2^2-4^2+3^2=8+4-16+9=5.$

2) $\left(\frac{15^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{6^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}=\left(\frac{(3\cdot 5)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{(2\cdot 3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}=$

$=\left(\frac{3^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}=\left(\frac{5^{-1}}{2^0}\right)^{-2}=5^2=25;$

3) $72^{1,5}\cdot 108^{-\frac{2}{3}}\cdot 144^{0,75}\cdot 13{,}5^{\frac{1}{6}}=$

$=(2^3\cdot 3^2)^{1,5}\cdot(2^2\cdot 3^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3^2\cdot 2^4)^{0,75}\cdot\left(\frac{3^3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}=$

$=2^{4,5}\cdot 3^3\cdot 2^{-1\frac{1}{3}}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{1,5}\cdot 2^3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{6}}=$

$=2^{4,5-1\frac{1}{3}+3-\frac{1}{6}}\cdot 3^{3-2+1,5+\frac{1}{2}}=2^6\cdot 3^3=64\cdot 27=1728.$

4.15.5. KEERUKAMAID JUURAVALDISTE TEISENDUSI.

1) $\frac{22}{\sqrt{5}-7}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{9}{5-\sqrt{7}}=\frac{22(\sqrt{5}-7)}{(\sqrt{5}+7)(\sqrt{5}-7)}-$

$-\frac{1\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\frac{9(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}=$

$=\frac{22(\sqrt{5}-7)}{5-49}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{9(5+\sqrt{7})}{25-7}=$

$=\frac{{}^{1}\cancel{22}(\sqrt{5}-7)}{-\cancel{44}_{2}}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{9(5+\sqrt{7})}{18}=$

$=\frac{-\cancel{\sqrt{5}}+7-\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{5}}+5+\cancel{\sqrt{7}}}{2}=\frac{12}{2}=6;$

2) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}-2a^{-\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}=$

$=\frac{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}=\frac{a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}};$

3) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{a+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}=\frac{{}^{1}\cancel{a^{\frac{1}{3}}}(a-b)}{\cancel{a^{\frac{1}{3}}}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}=$

$=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\cancel{\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}}{\cancel{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}};$

4) $\left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right)\cdot\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}=$

$=\left[\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right]\cdot\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}=$

$=\frac{\cancel{\sqrt{xy}}-y-\cancel{\sqrt{xy}}-y}{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\cdot\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}=$

$=\frac{\cancel{-2y\cdot(x-y)}}{\sqrt{x}\cancel{(x-y)}\cdot\cancel{2}\sqrt{xy}}=-\frac{y}{x\sqrt{y}};$

5) $$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{\sqrt[3]{a^{-1}-ba^{-2}}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-ab-\frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}=$$

$$=\frac{(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})}{[a(a-b)]^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}}}-ab-a^2-b^2=$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-b}{a^2}}}-ab-a^2-b^2=$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}-ab-a^2-b^2=$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a-b}-ab-a^2-b^2=$$

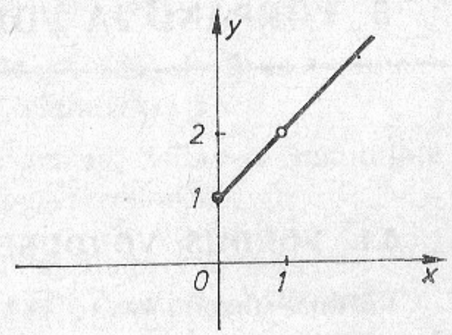
$$=\frac{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)}{\cancel{a-b}}-ab-a^2-b^2=$$

$$=\cancel{a^2}+\cancel{ab}+\cancel{b^2}-\cancel{ab}-\cancel{a^2}-\cancel{b^2}=0;$$

6) Lihtsusta funktsiooni avaldis ja konstrueeri graafik:

$$y=\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}.$$

$$y=\frac{(x-1)(x^{1,5}-1)}{(x+x^{0,5}+1)(x^{0,5}+1)}+2x^{0,5}=$$



Joon. 4.1

$$=\frac{(x-1)(x^{0,5}-1)\cancel{(x+x^{0,5}+1)}}{\cancel{(x+x^{0,5}+1)}(x^{0,5}+1)}+2x^{0,5}=$$

$$=\frac{\cancel{(x^{0,5}+1)}(x^{0,5}-1)(x^{0,5}-1)}{\cancel{x^{0,5}+1}}+2x^{0,5}=$$

$$=x-\cancel{2x^{0,5}}+1+\cancel{2x^{0,5}}=x+1.$$

Saadud funktsiooni $y=x+1$ määramispiirkonnaks on $X=\{x\,|\,x\geqslant 0\wedge x\neq 1\}$.

5. VÕRRAND JA VÕRRANDISÜSTEEM

5.1. VÕRDUS, VÕRDUSE OMADUSI.

Võrduse moodustavad kaks avaldist, mis on ühendatud võrdusmärgiga.

Näited. $3+4=7$ tõene arvvõrdus
$8-3=4$ väär arvvõrdus
$2a=3(a+2)$, $2x-y=y-3$ } muutujat sisaldavad võrdused

Võrduse omadused näitavad, millistel juhtudel tõesest võrdusest saadakse tõene võrdus.

Näidetes eeldame, et antud võrdused on tõesed.

1. Võrduse pooli võib vahetada.

Näited. $3+5=8 \Leftrightarrow 8=3+5$; $a+2=5 \Leftrightarrow 5=a+2$.

2. Võrduse mõlema poolega võib liita ühe ja sama arvu või avaldise.

Näited. 1) $a-2=5 \Leftrightarrow a-2+2=5+2 \Leftrightarrow a=7$ (võrduse pooltega liitsime arvu 2);
2) $a+5=8 \Leftrightarrow a+5+(-5)=8+(-5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=8-5 \Leftrightarrow a=3$ (võrduse mõlema poolega liitsime arvu -5);
3) $3x=2x-4 \Leftrightarrow 3x+(-2x)=2x-4+(-2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-4$.

3. Võrduse mõlemat poolt võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvu või avaldisega.

Näited. 1) $16-6=10 \mid :2$; $8-3=5$;

2) $\frac{1}{2}ab=a^3b^2 \mid \cdot 6a^2b$; $\frac{1}{2}ab \cdot 6a^2b=a^3b^2 \cdot 6a^2b$; $3a^3b^2=6a^5b^3$.

5.2. VÕRRAND. SAMASUS.

Võrrandiks nimetatakse muutujaid sisaldavat võrdust muutujate väärtuste (võrrandite lahendite) leidmiseks.

Võrrandit nimetatakse vastavalt temast leitavate muutujate arvule ühe, kahe, kolme jne. muutujaga võrrandiks.

Näited. 1) $2x-3=0$ — ühe muutujaga võrrand;
2) $x^2-2xy+3=0$ — kahe muutujaga võrrand;
3) $x^2+xy+z=0$ — kolme muutujaga võrrand;
4) $2ax+b=0$ — ühe muutujaga võrrand juhul, kui sellest leitakse muutuja x väärtus.

Ühe muutujaga võrrandi lahendiks nimetatakse muutuja väärtust, mille paigutamisel võrrandisse muutuja asemele saame tõese arvvõrduse.

Näide. $2x-3=7$ on ühe muutujaga võrrand, mille lahend on $x=5$, sest $2 \cdot 5-3=7$ on tõene võrdus.

Kahe muutujaga võrrandi lahendiks nimetatakse arvupaari, mille asendamisel võrrandisse muutujate asemele saame tõese arvvõrduse.

Näide. $x+2y=9$ on kahe muutujaga võrrand, mille lahendeiks on arvupaarid:

a) $x=1$ ja $y=4$, sest $1+2 \cdot 4=9$;
b) $x=3$ ja $y=3$, sest $3+2 \cdot 3=9$ jne.

Samasuseks nimetatakse muutujat sisaldavat võrdust, millest muutuja iga väärtuse korral saame tõese arvvõrduse.

Näited. 1) $3(a-1)=3a-3$;
2) $5m-3m+2=2(m+1)$;
3) $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

5.3. SAMAVÄÄRSED VÕRRANDID, VÕRRANDI OMADUSED.

Samaväärseiks nimetatakse võrrandeid, mille lahendihulgad on võrdsed.

Näide. Võrrandite $2x-5=7$ ja $2x=12$ lahendihulk on $L=\{6\}$, järelikult on need võrrandid samaväärsed.

Võrrandeid saab teisendada nendega samaväärseiks võrrandeiks järgmiste võrrandi omaduste põhjal.

1. Võrrandi pooli võib vahetada.

Näide. $x+14=3x \Leftrightarrow 3x=x+14$

$L=\{7\}$ $L=\{7\}$

2. Võrrandi mõlema poolega võib liita ühe ja sama arvu või avaldise.

Näited. 1) $2x-3=5 \Leftrightarrow 2x-3+3=5+3 \Leftrightarrow 2x=8$;
$L=\{4\}$, $L=\{4\}$, $L=\{4\}$.

2) $5x=2x-12 \Leftrightarrow 5x+(-2x)=2x-12+(-2x)$
$L=\{-4\}$, $L=\{-4\}$,
$\Leftrightarrow 3x=-12$.
$L=\{-4\}$.

3. Võrrandi liikmeid võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes võrrandi liikme märgi vastupidiseks.

Märkus. Omadus 3 järeldub omadusest 2.

Näide. $5x-3=2x+18 \Leftrightarrow 5x-2x=18+3 \Leftrightarrow 3x=21$,

4. Võrrandi pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Näited. 1) $3x=18 \mid :3$; $x=6$;
2) $0{,}25x=3 \mid \cdot 4$; $x=12$.

Võrrandi poolte korrutamisel või jagamisel muutujat sisaldava avaldisega ning poolte astendamisel paarisarvulise astendajaga

võib võrrandi lahendihulk muutuda ja sellel juhul ei saa esialgsega samaväärset võrrandit.

Näited. 1) $x=2 \mid \cdot(x+1)$; $x(x+1)=2(x+1)$;
$L=\{2\}$, $L=\{2;\ -1\}$.

Võrrandi poolte korrutamisel avaldisega $(x+1)$ tuli juurde lahend $x=-1$. Juurde tulnud lahendit $x=-1$ nimetatakse esialgse võrrandi *võõrlahendiks*. Võõrlahend eraldatakse lahendihulgast kontrollimisega.

2) $x^2-2x=0 \mid :x$; $x-2=0$;
$L=\{0;\ 2\}$, $L=\{2\}$.

Võrrandi poolte jagamisel avaldisega x kadus lahend $x=0$. Järelikult ei tohi võrrandi pooli jagada sellise muutujat sisaldava avaldisega, mille nulliga võrdumise korral on võrrandi mõlemad pooled võrdsed nulliga.

3) $x=-2 \mid ()^2$; $x^2=4$;
$L=\{-2\}$; $L=\{-2;\ 2\}$.

Võrrandi poolte ruutu tõstmisel tuli juurde lahend $x=2$. Juurde tulnud võõrlahend eraldatakse kontrollimisega.

Võrrandi pooli võib jagada sellise muutujat sisaldava avaldisega, mis ei saa võrduda nulliga muutuja ühegi väärtuse korral.

Näide. $x^3+x=2x^2+2 \Leftrightarrow x(x^2+1)=2(x^2+1) \mid :(x^2+1)$

$L=\{2\}$ $x=2$
$x^2+1\neq 0$ $L=\{2\}$

5.4. ÜHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRAND.

Ühe muutujaga lineaarvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mille üldkuju on $ax=b$, kus $a\neq 0$.

Sellel võrrandil on üks lahend $x=\frac{b}{a}$. Lineaarvõrrandiga samaväärsel võrrandil võib olla palju keerukam kuju.

Võrrandi teisendamine kujule $ax=b$ ja lahendamine toimub järgmise skeemi järgi:

1) avame sulud, koondame sarnased liikmed;
2) kui võrrandis esineb murde, siis vabaneme nendest, korrutades võrrandi pooli murdude ühise nimetajaga;
3) viime muutujat sisaldavad võrrandi liikmed ühele ja vabaliikmed teisele poole võrdusmärki;
4) koondame sarnased liikmed
5) jagame võrrandi mõlemat poolt muutuja kordajaga;
6) kontrollime saadud lahendi õigsust algvõrrandi kaudu.

Näited. 1) $6(x+3)+2(x+2)=10;$
$6x+18+2x+4=10;$
$8x+22=10;$
$8x=10-22;$
$8x=-12 \mid :8;$
$x=-1{,}5.$

Kontroll. $V=6\cdot(-1{,}5+3)+2\cdot(-1{,}5+2)=$
$=6\cdot 1{,}5+2\cdot 0{,}5=9+1=10.$

Vastus. $x=-1{,}5.$

Vastus. $x=-1{,}5.$

2) $\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{1+x}{2}=1\cdot 10;$

$4x-2-5-5x=10;$
$-x-7=10;$
$-x=10+7;$
$-x=17 \mid \cdot(-1);$
$x=-17.$

Kontroll.

$$V=\frac{2\cdot(-17)-1}{5}-\frac{1-17}{2}=\frac{-34-1}{5}-\frac{-16}{2}=$$

$$=\frac{-35}{5}-(-8)=-7+8=1.$$

Vastus. $x=-17.$

Võrrandi teisendamisel temaga samaväärseks võrrandiks võime jõuda kujule $0\cdot x=0$. Selle võrrandi ja järelikult ka lähtevõrrandi lahendiks sobib mistahes arv ja võrrand osutub samasuseks.

Näide. $2(2x-3)=2x-6+2x;$
$4x-6=4x-6;$
$4x-4x=-6+6;$
$0\cdot x=0;$ x on mistahes arv.

Vastus. $2(2x-3)=2x-6+2x$ on samasus.

Võrrandi teisendamise tulemuseks võib olla ka võrrand $0\cdot x=b$, kus $b\neq 0$. Sel juhul võrrandil puudub lahend, sest ei ole arvu, mis nulliga korrutamisel annaks tulemuseks nullist erineva arvu. Sellist võrrandit nimetatakse vastuoluliseks.

Näide. $2x+1=2x+3;$
$2x-2x=3-1;$
$0\cdot x=2;$ võrrandil puudub lahend.

Vastus. Võrrand on vastuoluline.

5.5. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRANDISÜSTEEM.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandiks nimetatakse võrrandit $ax+by=c$ (võrrandi normaalkuju), kus a, b ja c on antud arvud; nendest a ja b on muutujate kordajad ning c vabaliige.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandi lahendiks on arvupaar $(x;\ y)$, mis rahuldab antud võrrandit.

Kahe muutujaga võrrandil on lõpmata palju lahendeid.
Võrrandi $ax+by=c$ erijuhud.

1. Kui $a=0$, siis $0\cdot x+by=c \Rightarrow y=\dfrac{c}{b}$. Olgu $\dfrac{c}{b}=m$, siis $y=m$.

Näide. $-2y=6 \Rightarrow y=\dfrac{6}{-2};$ $y=-3.$

2. Kui $b=0$, siis $ax+0\cdot y=c \Rightarrow x=\dfrac{c}{a}$. Olgu $\dfrac{c}{a}=n$, siis $x=n$.

Näide. $\frac{1}{2}x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{\frac{1}{2}}$; $x=6$.

3. Kui $a=0$ ja $c=0$, siis $y=0$.
4. Kui $b=0$ ja $c=0$, siis $x=0$.

Toodud erijuhtude korral saame kahe muutujaga lineaarvõrrandist ühe muutujaga lineaarvõrrandi.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks teisendame võrrandid normaalkujulisteks.

Süsteemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

lahendiks on arvupaar $(x; y)$, mis rahuldab mõlemat antud võrrandit. Arvupaar $(x; y)$ on mõlema võrrandi lahendihulkade ühisosa.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Võrrandite vastavaid pooli korrutatakse vajaduse korral selliste teguritega, et ühe muutuja kordajad oleksid teineteise vastandarvud. Seejärel liidetakse võrrandite vastavad pooled ning saadakse ühe muutujaga võrrand. Selle võrrandi lahendi asendamisel ühte antud võrrandeist saame arvutada teise muutuja väärtuse. Ühest muutujast vabanemist nimetatakse selle muutuja **elimineerimiseks.**

Näited.

1) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ $2\cdot 2-y=7 \Rightarrow -y=7-4,\ y=-3.$

$5x=10 \mid :5$

$x=2$

Vastus. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x+2y=8 \mid \cdot 5 \\ 2x+5y=-1 \mid \cdot(-2) \end{cases}$ $\begin{cases} 25x+10y=40 \\ -4x-10y=2 \end{cases}$

$21x=42 \mid :21$

$x=2$

$5\cdot 2+2y=8;\quad 2y=8-10;\quad 2y=-2 \mid :2$

$y=-1.$

Vastus. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega.

Avaldame ühest võrrandist ühe muutuja ja asendame saadud avaldise teise võrrandisse. Nüüd lahendame saadud ühe muutujaga võrrandi. Selle võrrandi lahendi asendamisel teise muutuja avaldisse saame arvutada teise muutuja väärtuse.

Näide. $\begin{cases} 5x+2y=8 \\ 2x+5y=-1. \end{cases}$

Avaldame esimesest võrrandist muutuja y.

$2y=8-5x \mid :2;\quad y=\frac{8-5x}{2}.$

Asendame saadud avaldise teise võrrandisse.

$$2x+5\cdot\frac{8-5x}{2}=-1;\quad \overset{2}{\underset{\smile}{2x}}+\frac{40-25x}{2}=\overset{2}{\underset{\smile}{-1}} \mid \cdot 2;$$

$$4x+40-25x=-2;\quad -21x=-42 \mid :(-21);$$

$$x=2;\quad y=\frac{8-5\cdot 2}{2}=\frac{8-10}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Vastus. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine lahendivalemite abil.

Kaherealiseks determinandiks nimetatakse avaldist $a_1b_2-a_2b_1$, mida tähistatakse

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Arve a_1, b_1, a_2 ja b_2 nimetatakse *determinandi elementideks*. Arvud a_1 ja b_2 moodustavad determinandis *peadiagonaali*, a_2 ja b_1 *kõrvaldiagonaali*.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

lahendid on $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$, kus

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1, \quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1 \quad \text{ja}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

Lahendivalemite uurimine.

1. $D\neq 0$, s. t. $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$. **Süsteemil on üks lahend (vastavad sirged lõikuvad ühes punktis).**

2. $D=0$, $D_x\neq 0$, $D_y\neq 0$, s. t. $a_1b_2-a_2b_1=0$, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$; $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$, $\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. **Süsteemil puudub lahend (vastavad sirged on paralleelsed).**

3. $D=0$, $D_x=0$, $D_y=0$, s. t. $a_1b_2-a_2b_1=0$, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$; $c_1b_2-c_2b_1=0$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (võrrandite kordajad ja vabaliikmed on võrdelised). **Süsteemil on lõpmata palju lahendeid (vastavad sirged ühtivad).**

Näide.

$$\begin{cases} 5x+2y=8 \\ 2x+5y=-1 \end{cases}; \quad D=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=5\cdot 5-2\cdot 2=25-4=21.$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=8\cdot 5-(-1)\cdot 2=40+2=42;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5\cdot(-1)-2\cdot 8=-5-16=-21.$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{42}{21}=2; \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-21}{21}=-1;$$

Vastus. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$

5.6. RUUTKOLMLIIGE. RUUTVÕRRAND, SELLE LAHENDAMINE. BIRUUTVÕRRAND.

Ruutkolmliikmeks ehk teise astme kolmliikmeks nimetatakse hulkliiget ax^2+bx+c, mis sisaldab ruutliiget, lineaarliiget, vabaliiget ja ainult neid.

ax^2 — *ruutliige*, kus a on *ruutliikme kordaja*,
bx — *lineaarliige*, kus b on *lineaarliikme kordaja*,
c — *vabaliige*.

Üldkujulise ruutfunktsiooni avaldiseks on ruutkolmliige.

Ruutkolmliikme nullkohtadeks nimetatakse neid muutuja väärtusi, mille korral ruutkolmliikme väärtus on null (vt. jaot. 7.10.).

Ruutvõrrandiks nimetatakse võrrandit $ax^2+bx+c=0$, milles a, b ja c on mingid arvud ($a\neq 0$) ja x on muutuja.

Ruutkolmliikme nullkohtade leidmine on samaväärne vastava ruutvõrrandi lahendite leidmisega.

Ruutvõrrandit $ax^2+bx+c=0$, kus ükski kordaja ei võrdu nulliga, nimetatakse *täielikuks ruutvõrrandiks*.

Ruutvõrrandi lahendivalemid.

1. Täieliku ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendivalem on

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahend võrdub murruga, mille nimetajaks on kahekordne ruutliikme kordaja ja lugejaks on lineaarliikme kordaja vastandarv pulss-miinus ruutjuur lineaarliikme kordaja ruudu ja neljakordse ruutliikme kordaja ning vabaliikme korrutise vahest.

Juuremärgialust avaldist nimetatakse *diskriminandiks* ja tähistatakse tähega D. Diskriminandi leidmiseks võtame lineaarliikme kordaja ruutu ja tulemusest lahutame ruutliikme kordaja ning vabaliikme neljakordse korrutise: $D=b^2-4ac$.

Näide. $3x^2+5x-2=0$.

Siin $a=3$; $b=5$ ja $c=-2$.

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3};\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\cdot3};\quad x=\frac{-5\pm7}{6};$$

$$x_1=\frac{-5-7}{6}=-2;\quad x_2=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3}.$$

Lahendivalemit kasutatakse ka kujul $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

2. Kui täielikus ruutvõrrandis $a=1$, $b=p$ ja $c=q$, siis saadud ruutvõrrandit $x^2+px+q=0$ nimetatakse *taandatud ruutvõrrandiks.*

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalem on

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Näide. $x^2-4x-21=0$. Siin $p=-4$ ja $q=-21$.

$$x=-\frac{-4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2-(-21)};\quad x=2\pm\sqrt{4+21};$$

$$x=2\pm\sqrt{25};\quad x=2\pm5;$$
$$x_1=2-5=-3;$$
$$x_2=2+5=7.$$

3. Kui $b=2k$, s. t. lineaarliikme kordaja on paarisarv, siis

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}\ \text{ehk}\ x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},\ \text{kus}\ k=\frac{b}{2}.$$

Näide. $3x^2-4x-20=0$.

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3\cdot(-20)}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{3}=\frac{2\pm8}{3};\quad x_1=-2;\quad x_2=3\frac{1}{3}.$$

Ruutvõrrandi lahendivalemi uurimine.

1. **Kui $D>0$, siis on ruutvõrrandil 2 erinevat lahendit**

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\quad\text{ja}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

2. **Kui $D=0$, siis on ruutvõrrandil 2 võrdset lahendit**

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

Näide. $x^2+6x+9=0$.

$D=6^2-4\cdot9=36-36=0$; $x_1=x_2=-\frac{6}{2}=-3$.

3. **Kui $D<0$, siis ruutvõrrandil ei ole lahendeid reaalarvude hulgas.**

Näide. $2x^2+3x+6=0$.
$D=3^2-4\cdot2\cdot6=9-48=-39<0$.

Lahendid puuduvad reaalarvude hulgas.

Mittetäielikud ruutvõrrandid.

Ruutvõrrandit, kus puudub lineaarliige või vabaliige või lineaar- ja vabaliige nimetatakse *mittetäielikuks ruutvõrrandiks.*

1. Kui võrrandis $ax^2+bx+c=0$ on $b=0$, siis saame võrrandi $ax^2+c=0$, mille lahendeiks on $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ja $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Näide. $2x^2-4,5=0$; $2x^2=4,5$; $x^2=2,25$; $x=\pm\sqrt{2,25}$;
$x=\pm1,5$; $x_1=-1,5$; $x_2=1,5$.

2. Kui võrrandis $ax^2+bx+c=0$ on $c=0$, siis saame võrrandi $ax^2+bx=0$, millest $x(ax+b)=0$.

a) $x=0$; $x_1=0$; b) $ax+b=0$; $x_2=-\frac{b}{a}$.

Näide. $4x^2-6x=0\ |:2$; $2x^2-3x=0$; $x(2x-3)=0$.

a) $x=0$; $x_1=0$; b) $2x-3=0$; $2x=3$; $x_2=1\frac{1}{2}$.

3. Kui võrrandis $ax^2+bx+c=0$ *on* $b=c=0$, siis saame võrrandi $ax^2=0$, millest $x_1=x_2=0$.

Biruutvõrrand.

Biruutvõrrandiks (bikvadraatvõrrandiks) nimetatakse võrrandit kujul $ax^4+bx^2+c=0$.

Biruutvõrrandi lahendamisel teeme asenduse $x^2=z$ ning lahendame saadud ruutvõrrandi muutuja z suhtes. Saadud z väärtuse järgi leiame muutuja x väärtused.

Näide. $4x^4-x^2-18=0$. Asendame $x^2=z$, saame

$$4z^2-z-18=0;$$

$$z=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot4\cdot18}}{2\cdot4};\quad z=\frac{1\pm\sqrt{289}}{8};\quad z=\frac{1\pm17}{8};$$

$$z_1=-\frac{16}{8}=-2;\quad z_2=\frac{18}{8}=2\frac{1}{4}.$$

a) $x^2=-2$; saadud võrrand ei oma lahendeid reaalarvude hulgas.

b) $x^2=2\frac{1}{4};\quad x=\pm\sqrt{2\frac{1}{4}};\quad x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}};\quad x=\pm\frac{3}{2};$

Vastus. $x_1=-1\frac{1}{2};\quad x_2=1\frac{1}{2}.$

5.7. RUUTVÕRRANDI LAHENDITE OMADUSED. RUUTKOLMLIIKME LAHUTAMINE TEGUREIKS.

1. Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega (Viete'i teoreem).

Kui võrrandi $x^2+px+q=0$ lahendeiks on x_1 ja x_2, siis $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$. Kui võrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendeiks on x_1 ja x_2, siis $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, sest pärast a-ga jagamist on võrrand taandatud ruutvõrrand $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

2. Kui on antud kaks arvu x_1 ja x_2, siis need arvud on ruutvõrrandi $x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1x_2=0$ lahendeiks.

Toodud teoreemi kasutatakse ruutvõrrandi koostamiseks lahendite järgi, samuti ruutvõrrandi lahendite kontrollimiseks.

Näide. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $2\frac{1}{3}$ ja -2. Lahendite summa on $2\frac{1}{3}+(-2)=\frac{1}{3}$. Lahendite korrutis on $2\frac{1}{3}\cdot(-2)=-4\frac{2}{3}$.

Seega $p=-\frac{1}{3}$ ja $q=-4\frac{2}{3}$ ning ruutvõrrand on

$$x^2-\frac{1}{3}x-4\frac{2}{3}=0\mid\cdot3;\quad 3x^2-x-14=0.$$

3. Taandatud ruutkolmliige x^2+px+q lahutub tegureiks kujul $x^2+px+q=(x-x_1)\ (x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutkolmliikme nullkohad.

Ruutkolmliige ax^2+bx+c lahutub tegureiks kujul $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutkolmliikme nullkohad.

Näited. 1. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme x^2-2x-3. Leiame nullkohad, lahendades selleks võrrandi $x^2-2x-3=0$. $x_1=-1$; $x_2=3$. Järelikult $x^2-2x-3=[x-(-1)]\cdot(x-3)=(x+1)(x-3)$.

2. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme $3x^2+5x-2$. Leiame nullkohad, lahendades võrrandi $3x^2+5x-2=0$. $x_1=-2$; $x_2=-\frac{1}{3}$. Järelikult $3x^2+5x-2=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x+2)(3x-1)$.

5.8. TEISE ASTME VÕRRANDISÜSTEEMID.

Kahe muutujaga ruutvõrrandisüsteemiks nimetatakse sellist võrrandisüsteemi, milles vähemalt üks võrrandeist on ruutvõrrand.

Näited.

1) $\begin{cases}2x-y=3\\x^2+xy+2=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=2\\x^2-xy+2y^2=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x^2-x+y=0\\x^2-2x+xy+y^2=4.\end{cases}$

Avaldised x^2, xy, y^2 on muutujate suhtes ruutliikmed;
x^2y, xy^2 — kolmanda astme liikmed;
x^3y, x^2y^2, xy^3 — neljanda astme liikmed jne.

1. Kui ruutvõrrandisüsteemi üks võrrand on lineaarne, siis on süsteem lahendatav asendusvõttega.

Selleks:

1) avaldame lineaarvõrrandist ühe muutuja ja asendame saadud avaldise ruutvõrrandisse selle muutuja asemele;
2) lahendame saadud ühe muutujaga ruutvõrrandi;
3) ruutvõrrandist leitud muutuja väärtused asendame lineaarvõrrandisse selle muutuja asemele ja saame teise muutuja vastavad väärtused.

Näide. $\begin{cases} 2y-x=2 \\ 2x^2+3y^2-4x+y=176. \end{cases}$

1) $2y-x=2$; $x=2y-2$;
$2(2y-2)^2+3y^2-4\cdot(2y-2)+y=176$;

2) $2(4y^2-8y+4)+3y^2-8y+8+y-176=0$;
$8y^2-16y+8+3y^2-8y+8+y-176=0$;
$11y^2-23y-160=0$;

$D=(-23)^2-4\cdot 11\cdot(-160)=529+7040=7569$.

$y=\frac{23\pm\sqrt{7569}}{2\cdot 11}$; $y=\frac{23\pm 87}{22}$; $y_1=5$ ja $y_2=\frac{-64}{22}$;

$y_2=-2\frac{10}{11}$;

3) $x_1=2\cdot 5-2=8$; $x_2=2\cdot\left(-2\frac{10}{11}\right)-2=-7\frac{9}{11}$.

Vastus. $\begin{cases} x_1=8 \\ y_1=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-7\frac{9}{11} \\ y_2=-2\frac{10}{11}. \end{cases}$

2. Homogeense ruutvõrrandisüsteemi lahendamine.

Homogeenseks nimetatakse sellist ruutvõrrandisüsteemi, kus mõlema võrrandi kõik liikmed peale vabaliikme on muutujate suhtes ruutliikmed.

Homogeense ruutvõrrandisüsteemi korral korrutame võrrandite pooli selliste arvudega, et saame võrrandite parematele pooltele võrdsed vabaliikmed. Vasakute poolte võrdsustamisel saame võrrandi, mille kõik liikmed on muutujate suhtes ruutliikmed. Võrrandi pooli jagame y^2-ga (või x^2-ga), sest $y\neq 0$ (ka $x\neq 0$, kuna $x=0$ ja $y=0$ ei rahulda algvõrrandeid). Saame ruutvõrrandi uue muutuja $\frac{x}{y}$ suhtes $\left(\frac{y}{x}\text{ suhtes}\right)$. Selle võrrandi lahendit koos ühega algvõrranditest lahendades leiame süsteemi lahendid.

Näide. $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2 \mid\cdot 2 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-4xy-2y^2=4 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$

$2x^2-4xy-2y^2=xy+y^2$; $2x^2-5xy-3y^2=0 \mid :y^2$

$2\frac{x^2}{y^2}-5\frac{x}{y}-3=0$.

Asendame $\frac{x}{y}=z$, saame $2z^2-5z-3=0$.

$z=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}$;

$z_1=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$; $z_2=\frac{12}{4}=3$.

Et $z=\frac{x}{y}$, siis moodustame kaks võrrandisüsteemi:

a) $\begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{1}{2} \\ xy+y^2=4 \end{cases}$ ja b) $\begin{cases} \frac{x}{y}=3 \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

Saadud süsteemi lahendame asendusvõttega.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2} & y=-2x; \\ xy+y^2=4; & x(-2x)+(-2x)^2=4; \end{cases}$

$-2x^2+4x^2=4$; $2x^2=4$; $x^2=2$; $x=\pm\sqrt{2}$; $y=\pm 2\sqrt{2}$.

$\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=-2\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=2\sqrt{2}. \end{cases}$

Kontroll. 1) $(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})-(-2\sqrt{2})^2=$
$=2+8-8=2$;
$\sqrt{2}(-2\sqrt{2})+(-2\sqrt{2})^2=-4+8=4$.

2) $(-\sqrt{2})^2-2\cdot(-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}-(2\sqrt{2})^2=$
$=2+8-8=2$;
$(-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=-4+8=4$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=3; & x=3y; \\ xy+y^2=4; & 3y\cdot y+y^2=4; \quad 4y^2=4 \mid :4 \end{cases}$

$y^2=1$; $y=\pm 1$; $x=\pm 3$.

$\begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1. \end{cases}$

Kontroll. 1) $3^2-2\cdot 3\cdot 1-1^2=9-6-1=2$;
$3\cdot 1+1^2=3+1=4$.

2) $(-3)^2-2\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)^2=$
$=9-6-1=2$;
$(-3)\cdot(-1)+(-1)^2=3+1=4$.

Vastus. $\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=-2\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=2\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1. \end{cases}$

Antud võrrandisüsteemi võime lahendada ka järgmiselt: asendame $x=yz$, saame

$\begin{cases} y^2z^2-2y^2z-y^2=2 \\ y^2z+y^2=4. \end{cases}$

Jagame võrrandite vastavad pooled.

$$\frac{y^2(z^2-2z-1)}{y^2(z+1)}=\frac{2}{4}$$

Saame $2z^2-4z-2=z+1$
$2z^2-5z-3=0$

Siit $z_1=-\frac{1}{2}$ ja $z_2=3$. Edasi lahendame kaks võrrandisüsteemi:

a) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}y \\ xy+y^2=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3y \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

5.9. MURDVÕRRANDID.

Murdvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab muutujat murru nimetajas.

Murdvõrrandi lahendamiseks viime kõik võrrandi liikmed ühele poole võrdusmärki ja leiame ühise nimetaja. Kuna murd võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui lugeja on null ja nimetaja ei ole null, siis võtame murru lugeja võrdseks nulliga ning lahendame saadud võrrandi. Leitud lahendite hulgast kõrvaldame kontrolliga need, mis muudavad nimetaja nulliks.

Näited. 1) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}=0$; ($x-1$, $x+2$, $x-1$)

$\dfrac{x^2-1-x-2+x-1}{(x+2)(x-1)}=0$; $\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)}=0$.

$\begin{cases} x^2-4=0 & x^2-4=0; \quad x^2=4; \quad x_1=-2; \quad x_2=2. \\ (x+2)(x-1)\neq 0; & (x+2)(x-1)\neq 0; \quad x\neq -2; \quad x\neq 1. \end{cases}$

Järelikult $x_1=-2$ ei sobi lahendiks.

Kontrollime lahendit $x_2=2$.

$$\frac{2+1}{2+2}-\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2+2}=\frac{3}{4}-1+\frac{1}{4}=1-1=0.$$

Vastus. $x=2$.

2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}=\dfrac{1}{2-x}-1;$

$$\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3(x+2)(x-2)}-\frac{1}{2-x}+1=0;$$

$$\frac{1\ (3(x+2)}{x-2}-\frac{6-x\ (1}{3(x+2)(x-2)}+$$

$$+\frac{1\ (3(x+2)}{x-2}+1\ (3x^2-12=0$$

$$\frac{3x+6-6+x+3x+6+3x^2-12}{3(x+2)(x-2)}=0.$$

$$\begin{cases} 3x^2+7x-6=0 \\ 3(x-2)(x+2)\neq 0; \quad x\neq 2; \quad x\neq -2. \end{cases}$$

$3x^2+7x-6=0$; $D=49-4\cdot 3\cdot(-6)=49+72=121$;

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{2\cdot 3};\quad x=\frac{-7\pm 11}{6};\quad x_1=-3;\quad x_2=\frac{2}{3}.$$

Kontroll a) $x_1=-3$. $V=\dfrac{1}{-3-2}-\dfrac{6-(-3)}{3(-3)^2-12}=$

$$=-\frac{1}{5}-\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=-\frac{4}{5}$$

$$P=\frac{1}{2+3}-1=\frac{1}{5}-1=-\frac{4}{5};\quad V=P.$$

b) $x_2=\dfrac{2}{3}$; $V=\dfrac{1}{\frac{2}{3}-2}-\dfrac{6-\frac{2}{3}}{3\left(\frac{2}{3}\right)^2-12}=$

$$=\frac{1}{-1\frac{1}{3}}-\frac{5\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-12}=-\frac{3}{4}-\frac{5\frac{1}{3}}{-10\frac{2}{3}}=$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{\overset{1}{\cancel{16}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{2}{\cancel{32}}}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$P=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}-1=\frac{1}{1\frac{1}{3}}-1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4};\quad V=P.$$

Vastus. $x_1=-3$; $x_2=\dfrac{2}{3}$.

Sama võrrandit võime lahendada ka järgmiselt.

$\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}=\dfrac{1}{2-x}-1.$ $x-2\neq 0$; $x+2\neq 0$.

$$\frac{1\ (3x+6}{x-2}-\frac{6-x\ (1}{3(x-2)(x+2)}=$$

$$=-\frac{1\ (3x+6}{x-2}-1\ (3x^2-12\ \Big|\cdot 3(x-2)(x+2)$$

$3x+6-6+x=-3x-6-3x^2+12.$

$3x^2+7x-6=0$; siit $x_1=-3$ ja $x_2=\dfrac{2}{3}$.

5.10. ABSOLUUTVÄÄRTUSEGA VÕRRANDID.

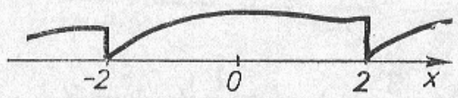
Võrrandit, kus muutuja või muutujat sisaldav avaldis on eraldatud absoluutväärtuse märkidega, nimetatakse **absoluutväärtusega võrrandiks.**

Näited. 1. $|x|=5$, siis $x_1=-5$ ja $x_2=5$.

2. $|x-3|=4$, siis 1) $x-3=-4$; $x=-4+3$; $x_1=-1$.
   2) $x-3=4$; $x=4+3$; $x_2=7$.

3. $|x-2|+|x+2|=4$.

Sellise võrrandi lahendamisel leiame esiteks $x-2$ ja $x+2$ nullkohad. Need on vastavalt 2 ja -2. Võrrandit lahendame edasi eraldi kolmes vahemikus: $x\leqslant -2$, $-2<x\leqslant 2$ ja $x>2$. (Joon. 5.1)



Joon. 5.1

1) $x\leqslant -2$. Sel juhul on nii $x-2$ kui ka $x+2$ negatiivsed, kuid me peame absoluutväärtuse märkide ärajätmisel saama positiivsed avaldised. Selleks muudame avaldiste ees olevaid märke. Saame $-(x-2)-(x+2)=4$. Siit aga $-x+2-x-2=4$; $-2x=4$ ja $x=-2$, mis rahuldab antud võrrandit.

2) $-2<x\leqslant 2$. Sel juhul on $x-2$ negatiivne, aga $x+2$ positiivne. Arutledes samuti nagu eelneval juhul, saame võrrandi $-(x-2)+x+2=4$; $-x+2+x+2=4$; $4=4$.
Järelikult rahuldavad võrrandit kõik x väärtused vaadeldavas vahemikus.

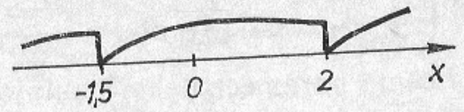
3) $x>2$. Sel juhul on mõlemad avaldised positiivsed ja saame $x-2+x+2=4$, millest $x=2$. Saadud tulemus aga ei kuulu vaadeldavasse vahemikku.

Vastus. $L=\{x|-2<x<2\}$

4. $|2x+3|-|x-2|=5$.

$2x+3=0$, $x=-1\frac{1}{2}$. $x-2=0$, $x=2$.

Joon. 5.2



Lahendame võrrandi vahemikes $x\leqslant -1\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}<x\leqslant 2$ ja $x>2$. (joon. 5.2.).

1) $x\leqslant -1\frac{1}{2}$. $-(2x+3)+(x-2)=5$, $-2x-3+x-2=5$, $-x=10$, $x_1=-10$.

2) $-1\frac{1}{2}<x\leqslant 2$. $2x+3+(x-2)=5$, $3x=4$, $x_2=1\frac{1}{3}$.

3) $x>2$. $2x+3-(x-2)=5$, $2x+3-x+2=5$, $x=0$.

Saadud tulemus ei ole lahendiks, sest ei kuulu vaadeldavasse vahemikku.

Vastus. $x_1=-10$, $x_2=1\frac{1}{3}$.

5.11. PARAMEETREID SISALDAVAD VÕRRANDID.

Võrrandit, mis sisaldab mitut muutujat ja mida lahendatakse ühe muutuja suhtes, lugedes teiste muutujate väärtusi antuteks ning vaadates võrrandi lahendamise käigus neile kui arvudele, nimetatakse parameetreid sisaldavaks võrrandiks.

Antuteks loetud muutujaid nimetatakse *parameetriteks.*

Parameetreid sisaldavate võrrandite korral tuleb selgitada, milliseid väärtusi võivad parameetrid omada ja kuidas sõltub lahend parameetrite väärtusest.

Näited. 1. $x+2a=5$.

a) Loeme parameetriks muutuja a, siis $x=5-2a$.

b) Loeme parameetriks muutuja x, siis $a=\frac{5-x}{2}$.

Antud näites võib parameeter omada mis tahes reaalarvulisi väärtusi. Muutujaid x, y ja z tavaliselt parameetriteks ei loeta.

2. $2x-a=4bx$.

Loeme parameetriteks muutujad a ja b, siis $2x-4bx=a$;

$$x=\frac{a}{2-4b}.$$

Võrrandil on üks lahend, kui $2-4b\neq 0$, s. t. $b\neq\frac{1}{2}$.

Võrrandil puudub lahend, kui $a\neq 0$ ja $b=\frac{1}{2}$.

Võrrandil on lõpmata palju lahendeid, kui $a=0$ ja $b=\frac{1}{2}$.

3. $x^2-2ax+a=0$.

a) Loeme parameetriks muutuja a, siis $x=a\pm\sqrt{a^2-a}$. Juurealuse avaldise jaoks kehtib nõue $a^2-a\geqslant 0$, millest $a\leqslant 0\vee\vee a\geqslant 1$. Kui $0<a<1$, siis võrrandil lahend puudub.

Vastus. $x=a\pm\sqrt{a^2-a}$, kus $a\leqslant 0\vee a\geqslant 1$.

b) Loeme parameetriks muutuja x, siis $a=\frac{x^2}{x-1}$. Võrrandil on üks lahend, kui $x\neq 1$. Võrrandil puudub lahend, kui $x=1$.

5.12. TEKSTÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID.

Ülesande lahendamisel võrrandi abil väljendatakse ülesande andmete ja muutujate vahelised seosed võrrandina või võrrandisüsteemina ning lahendatakse need.

Näide 1. Ühe põllu igalt hektarilt saadi 25 tsentnerit vilja, teise põllu igalt hektarilt 30 tsentnerit. Esimene põld oli teisest 1 hektari võrra suurem. Kui suur oli kummagi põllu kogusaak, kui esimese põllu kogusaak oli 10 tsentneri võrra suurem?

Lahendus. Oletame, et esimeselt põllult saadi x tsentnerit vilja, siis teiselt põllult saadi $(x-10)$ tsentnerit vilja. Esimese põllu pindala oli siis $\frac{x}{25}$ ha, teisel põllul $\frac{x-10}{30}$ ha. Kuna esimene põld oli teisest 1 hektari võrra suurem, siis saame koostada võrrandi: $\frac{x}{25}-\frac{x-10}{30}=1$.

(Samaväärsed on võrrandid $\frac{x}{25}=\frac{x-10}{30}+1$ ja $\frac{x}{25}-1=\frac{x-10}{30}$).

Lahendame saadud võrrandi: $\frac{\overset{6}{x}}{25}-\frac{\overset{5}{x-10}}{30}=\overset{150}{1}\Big|\cdot 150$

$6x-5(x-10)=150$; $6x-5x+50=150$; $x=100$.

Esimese põllu saak oli 100 tsentnerit ja teisel põllul $100-10=90$ tsentnerit.

Kontroll. Esimese põllu pindala oli $\frac{100}{25}=4$ ha, teisel põllul $\frac{90}{30}=3$ ha. Esimese põllu pindala oli suurem $4-3=1$ ha võrra.

Vastus. Esimese põllu kogusaak oli 100 ts, teisel põllul 90 ts.

Antud ülesannet võib lahendada ka võrrandisüsteemiga.

Olgu esimese põllu kogusaak x ts ja teisel põllul y ts. Kuna esimese põllu kogusaak on 10 ts võrra suurem, siis $x-y=10$. Esimese põllu pindala oli $\frac{x}{25}$ ha, teisel põllul $\frac{y}{30}$ ha. Et esimene põld oli 1 ha võrra suurem, siis $\frac{x}{25}-\frac{y}{30}=1$. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-y=10 \\ \frac{x}{25}-\frac{y}{30}=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=10 \\ \frac{\overset{6}{x}}{25}-\frac{\overset{5}{y}}{30}=\overset{150}{1} \end{cases}\Big|\cdot 150 \qquad \begin{cases} x-y=10 \\ 6x-5y=150 \end{cases}\Big|\cdot(-5)$$

$$\begin{cases} -5x+5y=-50 \\ 6x-5y=150 \end{cases}$$

$x=100$; $\quad 100-y=10$; $\quad y=90$.

Järgneb võrrandisüsteemi lahendi kontroll ja vastus.

Näide 2. Kahe linna vahemaa on 160 km. Ühest linnast teise väljuvad samaaegselt kaks autot. Ühe auto keskmine kiirus on 10 km võrra tunnis suurem kui teisel ja selletõttu jõuab ta kohale 48 minutit varem. Leia autode kiirused.

L a h e n d u s. Olgu esimese auto kiirus $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis teise auto kiirus on $(x-10)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

160 km läbimiseks kulub esimesel autol aega $\frac{160}{x}$ tundi, teisel autol $\frac{160}{x-10}$ tundi. Et esimesel autol kulub sõiduks 48 min.$=\frac{48}{60}$ tundi$=\frac{4}{5}$ tundi vähem, siis saame võrrandi

$\frac{160}{x}+\frac{4}{5}=\frac{160}{x-10}$. Lahendame saadud võrrandi.

$$\frac{160}{x}\overset{\underbrace{5x-50}}{}+\frac{4}{5}\overset{\underbrace{x^2-10x}}{}=\frac{160}{x-10}\overset{5x}{};$$

$$\frac{800x-8000+4x^2-40x-800x}{5x(x-10)}=0;$$

$$800x-8000+4x^2-40x-800x=0;$$

$$4x^2-40x-8000=0 \mid :4 \mid x^2-10x-2000=0;$$

$$5x(x-10)\neq 0; \qquad x\neq 0;\ x\neq 10;$$

$$x=5\pm\sqrt{25+2000}=5\pm\sqrt{2025}; \quad x=5\pm 45; \quad x_1=50; \quad x_2=-40$$

Teine lahend ei sobi ülesande tingimustega, sest auto kiirus ei saa olla negatiivne.

Esimese auto kiirus on $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, teisel autol $50-10=40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

K o n t r o l l. Esimesel autol kulub sõiduks aega $\frac{160}{50}=3\frac{1}{5}$ tundi, teisel $\frac{160}{40}=4$ tundi. Esimene auto jõuab kohale $4-3\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ tundi varem. $\frac{4}{5}$ tundi$=48$ minutit.

V a s t u s. Autode kiirused on $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Antud ülesannet võib lahendada ka võrrandisüsteemiga. Olgu esimese auto kiirus $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja teise auto kiirus $y\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Aega kulub sõiduks vastavalt $\frac{160}{x}$ tundi ja $\frac{160}{y}$ tundi.

Arvestades ülesande tingimusi, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-y=10 \\ \frac{160}{y}-\frac{160}{x}=\frac{4}{5}. \end{cases}$$

N ä i d e 3. Paaki täidetakse kahe kraani kaudu. Ainult esimese kraani kaudu täituks paak 22 minutit kauem kui ainult teise kraani kaudu. Kui kaks kraani avatakse samaaegselt, siis täitub paak ühe tunniga. Mitme minutiga täidavad kraanid paagi üksikult?

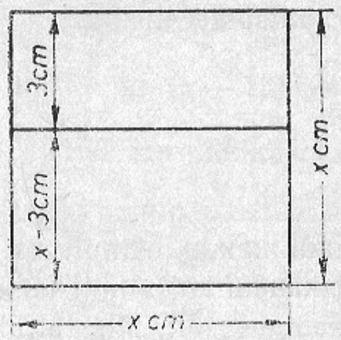
L a h e n d u s. Oletame, et esimese kraani kaudu kulub paagi täitmiseks x minutit, siis teise kraani kaudu kuluks selleks $(x-22)$ minutit. Esimene kraan täidaks 1 minutiga $\frac{1}{x}$ osa paagist, teine kraan aga $\frac{1}{x-22}$ osa paagist. Kuna koos nad täidavad paagi 1 tunni$=60$ minutiga, siis koos nad täidaksid 1 minutiga $\frac{1}{60}$ osa paagist. Järelikult saame võrrandi:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-22}=\frac{1}{60}.$$

Ülevaatlikum on sama võrrandi koostamine tabeli abil.

	aeg	1 minutiga
I kraan	x min.	$\frac{1}{x}$ osa
II kraan	$x-22$ min.	$\frac{1}{x-22}$ osa
koos	60 min.	$\frac{1}{60}$ osa

V a s t u s. Esimese kraani kaudu täitub paak 132 minutiga, teise kaudu 110 minutiga.



Joon. 5.3

N ä i d e 4. Kui ruudukujulisest plekitahvlist lõigata ära 3 cm laiune riba, siis jääb järele 40 cm² plekki. Leia plekitahvli esialgsed mõõtmed (joon. 5.3).

L a h e n d u s. Olgu plekitahvli külje esialgne pikkus x cm. Kui ära lõigata 3 cm laiune riba, siis järelejäänud ristküliku pikkus on x cm, laius $(x-3)$ cm ja pindala $x(x-3)$ cm². Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi $x(x-3)=40$.

$$x^2-3x-40=0;$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{3\pm13}{2}.$$

$$x_1=\frac{3-13}{2}=-5; \quad x_2=\frac{3+13}{2}=8.$$

x_1 ei sobi vastuseks. Järelikult on plekitahvli esialgne küljepikkus 8 cm.

K o n t r o l l. Pärast 3 cm laiuse riba äralõikamist on plekitüki mõõtmed 8 cm ja $8-3=5$ cm. Pindala on $8\cdot5=40$ cm².

V a s t u s. Plekitahvli esialgne küljepikkus on 8 cm.

6. VÕRRATUS.

6.1. VÕRRATUS, VÕRRATUSE OMADUSED.

Kui kahe avaldise vahel on võrratusmärk, siis sellist üleskirjutist nimetatakse võrratuseks.

Rangeteks võrratusteks nimetatakse võrratusi $a<b$ ja $b>a$.
Mitterangeteks võrratusteks nimetatakse võrratusi $a\leqslant b$ ja $b\geqslant a$, mis tähendab, et kehtib üks seostest $a<b$ $(a>b)$ või $a=b$.
Arve või avaldisi, mille vahel võrratusmärgid asetsevad, nimetatakse võrratuse poolteks.

Võrratuse omadusi.

1. Võrratusmärk jääb samapidiseks, kui võrratuse mõlema poolega liita üks ja sama arv.

N ä i d e. $-3<5$; liidame võrratuse pooltega arvu -2.
$-3+(-2)<5+(-2)\Leftrightarrow-5<3$.

Üldiselt $a>b\Leftrightarrow a+m>b+m$.

2. Võrratusmärk jääb samapidiseks, kui võrratuse mõlemat poolt korrutada (jagada) ühe ja sama positiivse arvuga.

N ä i t e d. a) $3>-4\,|\cdot4$; $12>-16$;
b) $-6<-4\,|:2$; $-3<-2$.

Üldiselt $a<b\,|\cdot m|\Leftrightarrow am<bm$, kui $m>0$.

3. Võrratusmärk muutub vastupidiseks, kui võrratuse mõlemat poolt korrutada (jagada) ühe ja sama negatiivse arvuga.

N ä i t e d. a) $-30<-12\,|\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$; $5>2$;

b) $-\frac{1}{2}<3\,|\cdot(-2)$; $1>-6$.

Üldiselt $a<b\,|\cdot m|\Leftrightarrow am>bm$, kui $m<0$.

4. Võrratusmärk muutub vastupidiseks, kui võrratuse pooled vahetada.

Näide. $2>-5 \Leftrightarrow -5<2$.

6.2. ÜHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRATUS.

Ühe muutujaga lineaarvõrratusteks nimetatakse võrratusi kujul $ax+b\geqslant 0$, $ax+b>0$, $ax+b\leqslant 0$ või $ax+b<0$, kus a ja b on antud arvud ning $a\neq 0$.

Võrratusi $ax+b>0$ ja $ax+b<0$ nimetatakse rangeteks võrratusteks, võrratusi $ax+b\geqslant 0$ ja $ax+b\leqslant 0$ nimetatakse mitterangeteks võrratusteks.

Lahendada ühe muutujaga võrratus tähendab leida kõik need muutuja väärtused, mille puhul antud võrratusest saame tõese lause. Need muutuja väärtused moodustavad võrratuse lahendihulga.

Muutujat sisaldavaid võrratusi nimetatakse samaväärseteks, kui nende lahendihulgad on võrdsed.

Võrratuste lahendamisel kasutatakse järgmisi võrratuste omadustest järelduvaid teisendusi, mis ei muuda võrratuse lahendihulka (võrratused jäävad samaväärseteks).

1. Võrratuse liikmed võib üle viia ühelt võrratuse poolelt teisele, muutes nende ees olevad märgid vastupidisteks.

2. Võrratuse pooli võib korrutada (jagada) ühe ja sama positiivse arvuga.

3. Võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama negatiivse arvuga tuleb muuta võrratuse märk vastupidiseks.

Näide. $2x-\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{7x-2}{3} \quad \Big|\cdot 6$ (teisendus 2);

$12x-3(x-3)<2(7x-2)$;

$12x-3x+9<14x-4$;

$12x-3x-14x<-4-9$ (teisendus 1);

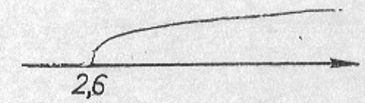
$-5x<-13 \;\big|:(-5)$ (teisendus 3);

$x>\dfrac{13}{5}$; $x>2{,}6$.

Võrratuse lahendihulga võib esitada

1) **võrratusena** (toodud näites $x>2{,}6$);
2) **geomeetriliselt** (joon. 6.1);
3) **hulgana** (toodud näites $L=\{x \mid x>2{,}6\}$).

Joon. 6.1



Mitterangete võrratuste lahenduskäik on analoogiline.

6.3. ÜHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRATUSESÜSTEEM.

Võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} a_1x+b_1>0 \\ a_2x+b_2>0 \\ \dots\dots \\ a_nx+b_n>0, \end{cases}$$

millesse kuuluvad ainult ühe muutujaga lineaarvõrratused, nimetatakse ühe muutujaga lineaarvõrratusesüsteemiks.

Ühe muutujaga lineaarvõrratusesüsteemi lahendihulgaks on antud võrratuste lahendihulkade ühisosa.

Kui võrratuste $ax+b>0$ ja $cx+d>0$ lahendihulgad tähistada L_1 ja L_2, siis võrratusesüsteemi $\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases}$ lahendihulk on $L=L_1\cap L_2$.

Võrratusesüsteemi $\begin{cases} ax+b\geqslant 0 \\ cx+d\geqslant 0 \end{cases}$ lahendamine.

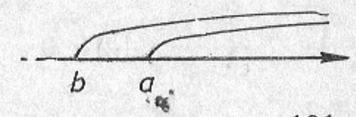
taandub alati ühele neljast järnevast juhust.

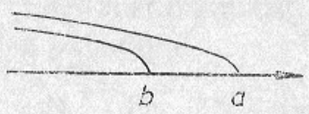
1. Kui $x>a$ ja $x>b$ ning sealjuures $a>b$, siis võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$ lahendiks on $x>a$ (joon. 6.2).

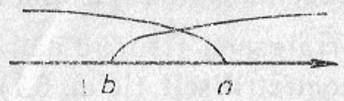
(Samapidised tõkked.)

Joon. 6.2

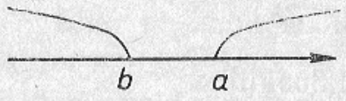




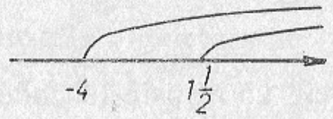
Joon. 6.3



Joon. 6.4



Joon. 6.5



Joon. 6.6

2. Kui $x<a$ ja $x<b$ ning sealjuures $b<a$, siis võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$ lahendiks on $x<b$ (joon. 6.3).

(Samapidised tõkked.)

3. Kui $x<a$ ja $x>b$ ning sealjuures $b<a$, siis võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$ lahendiks on $b<x<a$ (joon. 6.4).

(Vastupidised tõkked.)

4. Kui $x>a$ ja $x<b$ ning sealjuures $a>b$, siis võrratusesüsteemil

$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$ lahend puudub (joon. 6.5).

(Võrratusesüsteem on vastuoluline.)

Näited. 1) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \frac{1}{2}x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>3 \\ \frac{1}{2}x>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1\frac{1}{2} \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow$

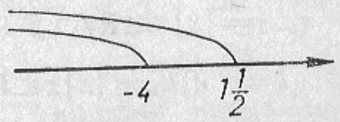
$\Rightarrow x>1\frac{1}{2}$ ehk $L_1=\left\{x|x>1\frac{1}{2}\right\}$; $L_2=\{x|x>-4\}$;

$L=L_1\cap L_2=\left\{x|x>1\frac{1}{2}\right\}$ (joon. 6.6).

2) $\begin{cases} 2x-3<0 \\ \frac{1}{2}x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<3 \\ \frac{1}{2}x<-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1\frac{1}{2} \\ x<-4 \end{cases} \Rightarrow x<-4$

ehk $L_1=\left\{x|x<1\frac{1}{2}\right\}$; $L_2=\{x|x<-4\}$;

$L=L_1\cap L_2=\{x|x<-4\}$ (joon. 6.7).



Joon. 6.7

3) $\begin{cases} 2x-3<0 \\ \frac{1}{2}x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<3 \\ \frac{1}{2}x>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1\frac{1}{2} \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow -4<x<1\frac{1}{2}$

ehk $L_1=\left\{x|x<1\frac{1}{2}\right\}$; $L_2=\{x|x>-4\}$;

$L=L_1\cap L_2=\left\{x|-4<x<1\frac{1}{2}\right\}$.

4) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \frac{1}{2}x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>3 \\ \frac{1}{2}x<-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1\frac{1}{2} \\ x<-4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Lahend puudub.

$L_1=\left\{x|x>1\frac{1}{2}\right\}$; $L_2=\{x|x<-4\}$; $L=L_1\cap L_2=\emptyset$.

5) $\begin{cases} \frac{3+4x}{5}-\frac{7-x}{2}>1 \\ \frac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x). \end{cases}$

a) $\frac{3+4x}{5}-\frac{7-x}{2}>1 \quad \Big| \cdot 10$; $2(3+4x)-5(7-x)>10$;

$6+8x-35+5x>10$; $13x>39 \mid :13$; $x>3$;

$L_1=\{x|x\in\mathbb{R}\wedge x>3\}$.

b) $\frac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x)$; $1\frac{2}{3}x+20-5x<8-2x$;

$1\frac{2}{3}x-5x+2x<8-20$; $-1\frac{1}{3}x<-12 \quad \Big| :\left(-1\frac{1}{3}\right)$;

$x>12:1\frac{1}{3}$; $x>\frac{12\cdot 3}{4}$; $x>9$;

$L_2=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge x>9\}$.

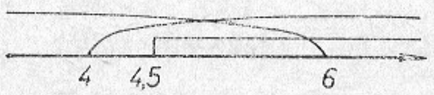
$L=L_1\cap L_2=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge x>9\}$.

Lineaarvõrratusesüsteemi moodustavate võrratuste arv võib olla suurem kui kaks. Olgu võrratusi n. Tähistame nende lahendihulgad vastavalt L_1, L_2, L_3 ..., L_n, siis võrratusesüsteemi lahendihulk L leitakse järgmiselt: $L=L_1\cap L_2\cap L_3\cap\ldots\cap L_n$.

Näide.

$$\begin{cases} 3-\frac{2-x}{2}<x & |\cdot 2 \\ 3-\frac{1}{2}x>0 \\ 2x-9\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-2+x<2x \\ -\frac{1}{2}x>-3 \;|\cdot(-2) \\ 2x\geqslant 9\;|:2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x<-4 \\ x<6 \\ x\geqslant 4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<6 \\ x\geqslant 4{,}5 \end{cases}$$ (joon. 6.8).



Joon. 6.8

Vastus. $4{,}5\leqslant x<6$ ehk $L=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge 4{,}5\leqslant x<6\}$.

6.4. RUUTVÕRRATUSED.

Ruutvõrratusteks ehk teise astme võrratusteks nimetatakse võrratusi kujus $ax^2+bx+c\geqslant 0$, kus a, b ja c on antud arvud ning $a\neq 0$.

Ruutvõrratusi lahendatakse *algebraliselt ja graafiliselt* (jaottus 7.13.).

Järgnevalt vaatleme ruutvõrratuste algebralist lahendamist.

1. Kui $b^2-4ac>0$, siis ruutkolmliige ax^2+bx+c lahutub tegureiks $a(x-x_1)(x-x_2)$. Olgu $x_1<x_2$. Lahendame ruutvõrratuse juhul $a=1$; sest võrratuste $ax^2+bx+c\gtrless 0$ poolte jagamisel ruutliikme kordajaga a, mille kohta eeldame, et see on positiivne, saame võrratused $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\gtrless 0$.

Kui $a<0$, siis saame võrratustest $ax^2+bx+c\gtrless 0$ võrratused $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\lessgtr 0$.

Asendame võrratused $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\gtrless 0$ võrratustega

$(x-x_1)(x-x_2)\gtrless 0$.

a) $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Kuna kahe teguri korrutis on positiivne, juhul kui

1) mõlemad tegurid on positiivsed,
2) mõlemad tegurid on negatiivsed,

siis on ruutvõrratuse lahendamine asendatav kahe lineaarvõrratusesüsteemi lahendamisega.

1) $\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>x_1 \\ x>x_2 \end{cases}$; kuna $x_1<x_2$, siis $L_1=\{x\,|\,x>x_2\}$.

2) $\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<x_1 \\ x<x_2 \end{cases}$, millest $L_2=\{x\,|\,x<x_1\}$.

Seega võrratuse lahendihulgaks on $L=\{x\,|\,x<x_1\vee x>x_2\}$.

b) $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Kuna kahe teguri korrutis on negatiivne siis, kui tegurid on erimärgilised, on ruutvõrratuse lahendamine asendatav kahe lineaarvõrratusesüsteemi lahendamisega.

1) $\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \begin{cases} x>x_1 \\ x<x_2 \end{cases}$; kuna $x_1<x_2$, siis $L_1=\{x\,|\,x_1<x<x_2\}$.

2) $\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \begin{cases} x<x_1 \\ x>x_2 \end{cases}$; millest $L_2=\emptyset$.

Seega võrratuse lahendihulgaks on $L=\{x\,|\,x_1<x<x_2\}$.

2. Kui $b^2-4ac=0$, siis ruutkolmliige lahutub tegureiks $a(x-x_1)^2$, sest $x_1=x_2$.

a) Kui $a>0$, siis $a(x-x_1)^2\geqslant 0$.

Võrratuse $ax^2+bx+c>0$ ehk $a(x-x_1)^2>0$ lahendihulgaks on $L=\{x\,|\,x<x_1 \vee x>x_1\}$ ehk $L=\{x\,|\,x\neq x_1\}$.
Võrratuse $ax^2+bx+c<0$ ehk $a(x-x_1)^2<0$ lahendihulgaks on $L=\varnothing$.

b) Kui $a<0$, siis $a(x-x_1)^2\leqslant 0$.

Võrratuse $ax^2+bx+c>0$ ehk $a(x-x_1)^2>0$ lahendihulgaks on $L=\varnothing$.
Võrratuse $ax^2+bx+c<0$ ehk $a(x-x_1)^2<0$ lahendihulgaks on $L=\{x\,|\,x<x_1 \vee x>x_1\}=\{x\,|\,x\neq x_1\}$.

3. Kui $b^2-4ac>0$, siis vastaval ruutvõrrandil puuduvad reaalsed lahendid ja ruutkolmliige ei lahutu reaalseiks tegureiks.

Ruutkolmliikme väärtused on sõltuvad ruutliikme kordaja a väärtusest kas ainult positiivsed või negatiivsed.

a) Kui $a>0$, siis võrratuse $ax^2+bx+c>0$ lahendihulgaks on $L=\mathbf{R}$ ja võrratuse $ax^2+bx+c<0$ lahendihulgaks $L=\varnothing$.

b) Kui $a<0$, siis võrratuse $ax^2+bx+c>0$ lahendihulgaks on $L=\varnothing$ ja võrratuse $ax^2+bx+c<0$ lahendihulgaks $L=\mathbf{R}$.

Näited.

1) $x^2-2x-3>0$; $x_1=-1$; $x_2=3$;
$(x+1)(x-3)>0$.

a) $\begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>3; \end{cases}$ $L_1=\{x\,|\,x>3\}$;

b) $\begin{cases} x+1<0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x<3; \end{cases}$ $L_2=\{x\,|\,x<-1\}$;

$L=\{x\,|\,x<-1 \vee x>3\}$.

2) $-2x^2+2x+12>0\,|:(-2)\,|\,x^2-x-6<0$;
$x_1=-2$; $x_2=3$; $(x+2)(x-3)<0$.

a) $\begin{cases} x+2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<3; \end{cases}$ $L_1=\{x\,|-2<x<3\}$;

b) $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x>3; \end{cases}$ $L_2=\varnothing$;

$L=\{x\,|-2<x<3\}$.

3) $2x^2+6x>0\,|:2$; $x^2+3x>0$; $x(x+3)>0$.

a) $\begin{cases} x>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-3; \end{cases}$ $L_1=\{x\,|\,x>0\}$;

b) $\begin{cases} x<0 \\ x+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x<-3; \end{cases}$ $L_2=\{x\,|\,x<-3\}$;

$L=\{x\,|\,x<-3 \vee x>0\}$.

4) $3x^2-6x+3>0\,|:3$; $x^2-2x+1>0$; $(x-1)^2>0$;
$x_1=x_2=1$; $L=\{x\,|\,x<1 \vee x>1\}=\{x\,|\,x\neq 1\}$.

5) $x^2-2x+10<0$; $b^2-4ac=4-40=-36<0$; $L=\varnothing$.

6.5. MURDVÕRRATUSED.

Murdvõrratuseks nimetatakse võrratust, kus muutuja esineb murru nimetajas.

Murdvõrratuse lahendamiseks kantakse kõik võrratuse liikmed võrratuse ühele poolele ja võetakse ühisele nimetajale. Edasisel lahendamisel arvestatakse, et murd on positiivne (negatiivne) siis ja ainult siis, kui murru lugeja ja nimetaja on samamärgilised (erimärgilised).

Näide. $\dfrac{x-3}{x+1}<2+\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{x-3}{x+1}-\overset{\overset{x+1}{\frown}}{2}-\dfrac{\overset{\overset{1}{\smile}}{1}}{x+1}<0$;

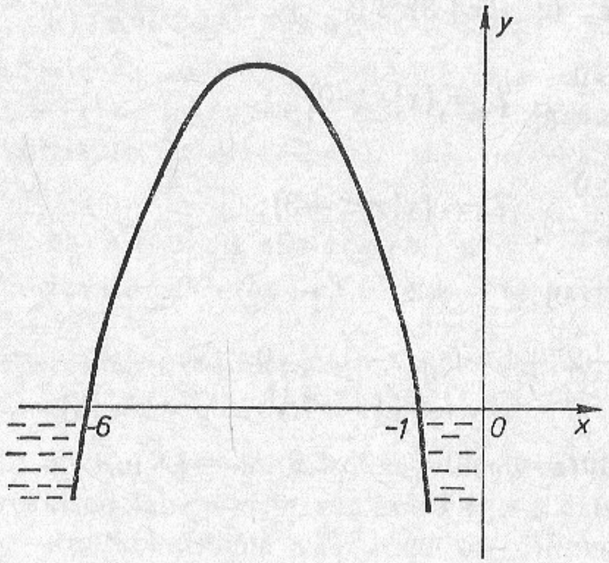
$\dfrac{x-3-2x-2-1}{x+1}<0$; $\dfrac{-x-6}{x+1}<0$;

Saadud murd on negatiivne kahel juhul:

1) $\begin{cases} -x-6>0 \\ x+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x>6 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-6 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-6$;

2) $\begin{cases} -x-6<0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x<6 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>-1$;

Vastus. $x<-6 \vee x>-1$.



Pärast teisendusi saadud võrratust $\frac{-x-6}{x+1}<0$ lahendades võime võrratuse pooli korrutada —1-ga. Siis saame võrratuse $\frac{x+6}{x+1}>0$, mida lahendame kahel juhul.

Saadud võrratust $\frac{x+6}{x+1}>0$ võib lahendada ka graafiliselt. Selleks asendame jagatise korrutisega $(x+6)(x+1)>0$, sest kahe avaldise korrutis on positiivne samadel tingimustel kui nende jagatis.

Leiame avaldise nullkohad. $x+6=0$; $x_1=-6$.

$x+1=0$; $x_2=-1$.

Graafikult loeme, et lahendiks on $x<-6 \vee x>-1$.

7. LIHTSAMAID FUNKTSIOONE.

7.1. PUNKTI KOORDINAADID TASANDIL.

Koordinaatteljestikuks nimetatakse kaht nullpunktis lõikuvat arvtelge.

Kui arvteljed ristuvad, siis on tegemist **ristkoordinaadistikuga.**

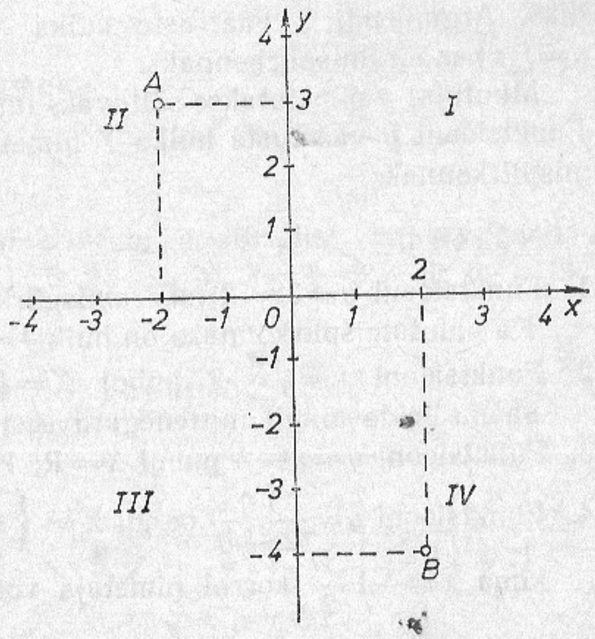
Tavaliselt joonestatakse üks telg horisontaalsena (rõhtsalt), positiivse suunaga vasakult paremale, teine vertikaalsena, positiivse suunaga alt üles.

Rõhttelge nimetatakse **abstsissteljeks e. *x*-teljeks,** vertikaalset e. püsttelge **ordinaatteljeks e. *y*-teljeks.**

Telgede ühist nullpunkti nimetatakse **koordinaatide nullpunktiks.**

Tasandit, millel on antud koordinaatteljestik, nimetatakse **koordinaattasandiks.**

Punkti koordinaadid moodustavad järjestatud arvupaari, mille esimest arvu nimetatakse **punkti abstsissiks,** teist **ordinaadiks.**



Joon. 7.1

Punkti abstsiss näitab, kui kaugele ja millises suunas tuleb liikuda x-telje sihil 0-punktist alates punkti asukoha leidmisel. Punkti ordinaat näitab, kui kaugele ja millises suunas tuleb liikuda y-telje sihil x-teljest alates.

N ä i t e d. $A(-2;\ 3)$ asukoha leidmiseks liigume esiteks x-teljel 0-punktist 2 ühiku võrra vasakule ja siis x-teljest alates 3 ühiku võrra üles.

$B(2;-4)$ asukoha leidmiseks liigume esiteks x-teljel 0-punktist 2 ühiku võrra paremale ja siis x-teljest alates 4 ühiku võrra alla.

Koordinaatteljed jaotavad tasandi neljaks **koordinaatveerandiks.** Nende numeratsioon on antud joonisel 7.1. Tähistame: I veerand, II veerand, III veerand ja IV veerand.

7.2. FUNKTSIONAALNE SEOS.

Seost $y=f(x)$ nimetatakse funktsionaalseks seoseks, kui muutuja x igale väärtusele vastab üks ja ainult üks muutuja y väärtus.

Võrdust $y=f(x)$ loetakse: y on x funktsioon (*igrek on iksi funktsioon*).

N ä i t e d. $y=2x$, $y=3x^2-2x$, $y=\dfrac{2x}{x-3}$.

Muutujat x nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks. Argumendi x väärtuste hulka X nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ määramispiirkonnaks.

Muutujat y nimetatakse sõltuvaks muutujaks ehk funktsiooniks. Funktsiooni y väärtuste hulka Y nimetatakse funktsiooni muutumispiirkonnaks.

N ä i t e d.

1. Funktsiooni $y=3x-2$ määramispiirkonnaks on hulk $X=\mathbf{R}$. Ka muutumispiirkonnaks on hulk $Y=\mathbf{R}$.
2. Funktsiooni $y=\sqrt{x-2}$ puhul $X=\{x|x\geqslant 2\}$, kuna ruutjuurt saame leida ainult mittenegatiivsest arvust; $Y=\{y|y\geqslant 0\}$.
3. Funktsiooni $y=x^2-4$ puhul $X=\mathbf{R}$; $Y=\{y|y\geqslant -4\}$.
4. Funktsiooni $y=\dfrac{2x}{2x+3}$ puhul $X=\left\{x|x<-1\frac{1}{2}\vee x>-1\frac{1}{2}\right\}$ kuna $x=-1\frac{1}{2}$ korral nimetaja võrduks nulliga.

$Y=\{y|y<1\vee y>1\}$, sest murru väärtus ei saa võrduda arvuga 1.

5. Funktsiooni $y=\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+3}}$ puhul $X=\{x|x<-3\vee x\geqslant 2\}$, kus määramispiirkond on võrratuse $\dfrac{2x-4}{x+3}\geqslant 0$ lahendiks. (jaot. 6.5.) $Y=\{y|y\geqslant 0\}$.

Funktsiooni tähise $y=f(x)$ kõrval kasutatakse ka teisi sümboleid, näiteks $y=g(x)$; $y=F(x)$; $s=f(t)$; $s=f(a)$.

Funktsiooni $y=f(x)$ väärtust mingi argumendi x väärtuse $x=a$ korral tähistatakse $f(a)$.

N ä i t e d.

Leiame funktsiooni $y=f(x)=x^2-4x$ väärtused kohtadel -1; 0 ja 2.

1) $f(-1)=1-4\cdot(-1)=5$;
2) $f(0)=0^2-4\cdot 0=0$;
3) $f(2)=2^2-4\cdot 2=4-8=-4$.

7.3. FUNKTSIOONI ESITUSVIISID.

Funktsiooni on võimalik esitada mitmel erineval viisil, näiteks

1) nooldiagrammina;
2) tabelina;
3) valemina ehk võrrandina;
4) järjestatud paaride hulgana;
5) graafikuna.

N ä i t e d.

Vaatleme kalle funktsiooni erinevaid esitusviise, kui määramispiirkonnaks on a) $X=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ b) $X=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

1) nooldiagrammina

   a) (joon. 7.2); b) (joon. 7.3).

2) tabelina

a)

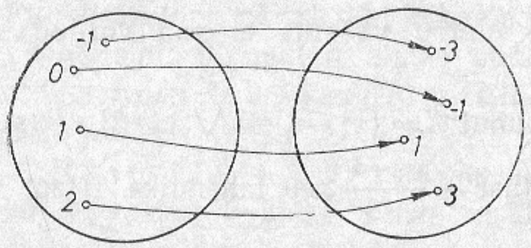
x	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3

kus $x\in A$ ja $y\in B$;

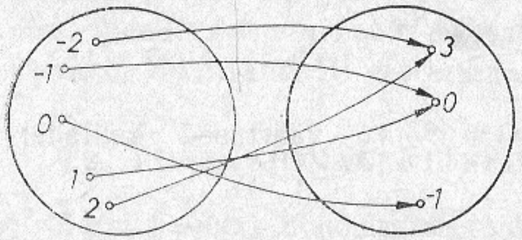
b)

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

kus $x\in K$ ja $y\in L$.



Joon. 7.2



Joon. 7.3

3) valemina

a) $y=2x-1$; b) $y=x^2-1$.

4) järjestatud paaride hulgana

a) $C=\{(-1;\ -3);\ (0;\ -1);\ (1;\ 1);\ (2;\ 3);$
b) $M=\{(-2;\ 3);\ (-1;\ 0);\ (0;\ -1);\ (1;\ 0);\ (2;\ 3)\}$.

5) graafikuna

a) (joon. 7.4); b) (joon. 7.5).

Olenevalt määramispiirkonnast võib funktsiooni graafik olla järgmine:

1) üksteisest eraldatud punktid;

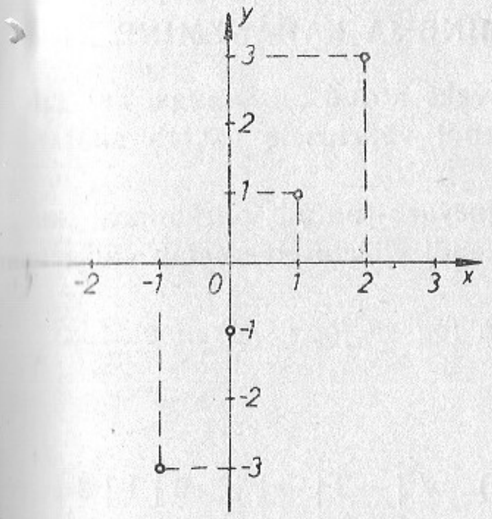
$y=2x-1$, kui $x\in\mathbf{Z}$ ja $-1\leqslant x\leqslant 2$ (joon. 7.4);

2) mingi joone osa;

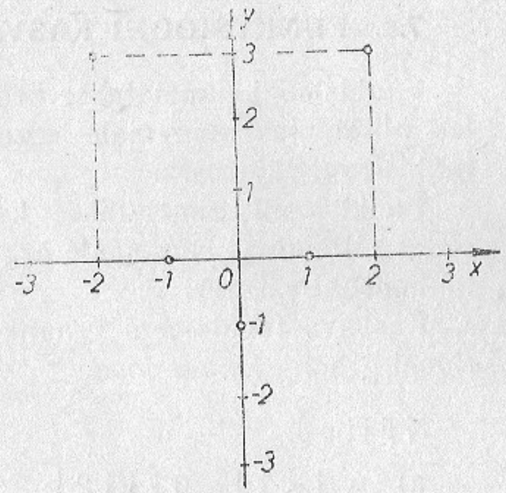
$y=2x-1$, kui $x\in\mathbf{R}$ ja $-1\leqslant x\leqslant 2$ (joon. 7.6);

3) mingi joon;

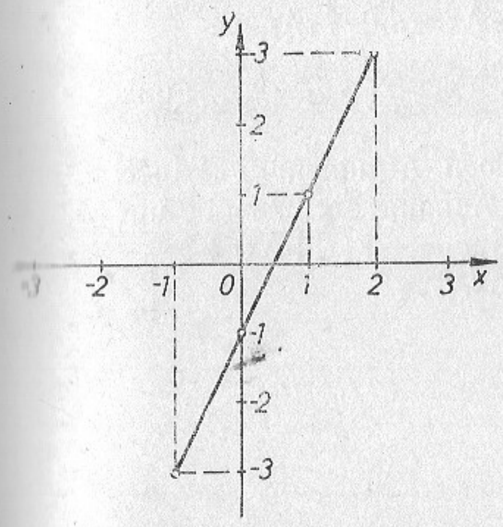
$y=2x-1$, kui $x\in\mathbf{R}$ (joon. 7.7).



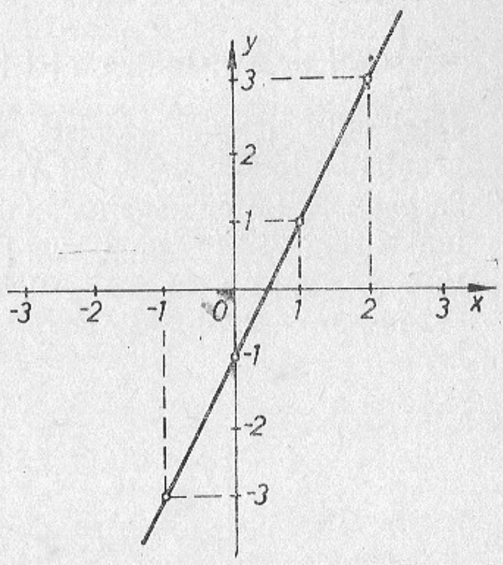
Joon. 7.4



Joon. 7.5



Joon. 7.6



Joon. 7.7

7.4. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

Funktsiooni nimetatakse kasvavaks antud piirkonnas, kui selles piirkonnas suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus.

Funktsiooni nimetatakse kahanevaks antud piirkonnas, kui selles piirkonnas suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus.

Kasvava funktsiooni graafik on *tõusev joon,* kahaneva funktsiooni graafik *langev joon.*

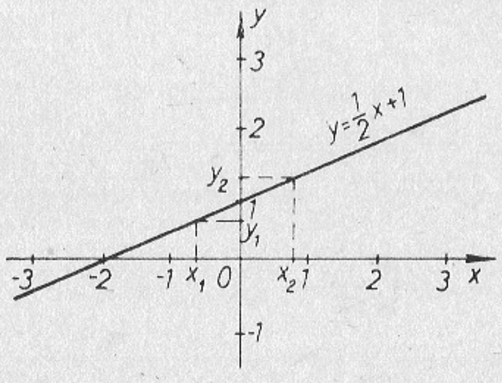
Näited.

a) $x \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid$, $y \mid -3 \mid -1 \mid 1 \mid 3 \mid$; b) $x \mid -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid$, $y \mid 3 \mid 0 \mid -1 \mid 0 \mid 3 \mid$.

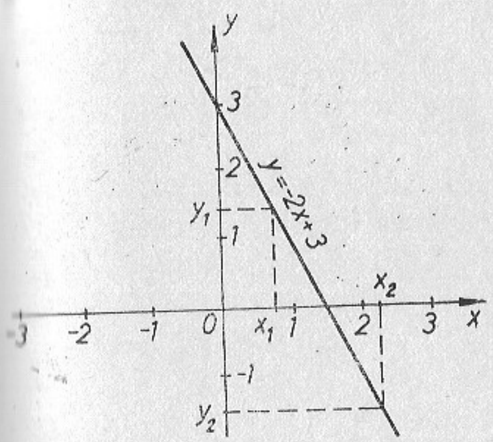
1. $y=\frac{1}{2}x+1$ on kasvav funktsioon. Argumendi väärtusel x_1 on funktsiooni väärtus $y_1=\frac{1}{2}x_1+1$. Anname argumendile uue väärtuse $x_2=x_1+\Delta x$, kus $\Delta x>0$, siis $y_2=\frac{1}{2}(x_1+\Delta x)+1=$ $=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\Delta x+1=\frac{1}{2}x_1+1+\frac{1}{2}\Delta x=y_1+\frac{1}{2}\Delta x$.

Järelikult $y_2>y_1$. Joonisel 7.8 $x_2>x_1\Rightarrow y_2>y_1$. Funktsiooni graafik on tõusev sirge, kui $X=\mathbf{R}$.

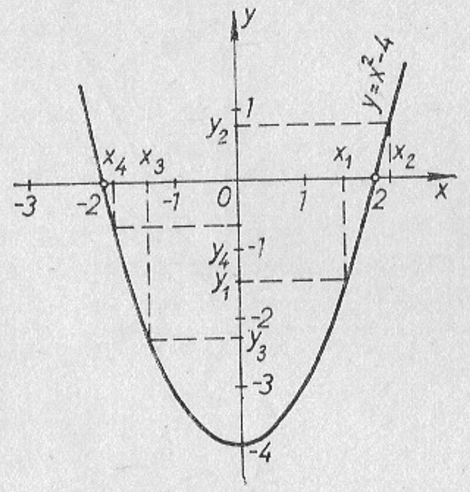
2. $y=-2x+3$ on kahanev funktsioon. Argumendi väärtusel x_1 on funktsiooni väärtus $y_1=-2x_1+3$. Anname argumendile uue väärtuse $x_2=x_1+\Delta x$, kus $\Delta x>0$, siis $y_2=-2(x_1+\Delta x)+3=-2x_1-$ $-2\Delta x+3=-2x_1+3-2\Delta x=y_1-2\Delta x$.



Joon. 7.8



Joon. 7.9



Joon. 7.10

Järelikult $y_2<y_1$. Joonisel 7.9 $x_2>x_1\Rightarrow y_2<y_1$. Funktsiooni graafik on langev sirge, kui $X=\mathbf{R}$.

3. $y=x^2-4$ on kasvav piirkonnas $X_1=\{x\mid x>0\}$ ja kahanev piirkonnas $X_2=\{x\mid x<0\}$ (joon. 7.10).

Argumendi väärtusel x_1 on funktsiooni väärtus $y_1=x_1^2-4$.

Anname argumendile uue väärtuse $x_2=x_1+\Delta x$, kus $\Delta x>0$, siis $y_2=(x_1+\Delta x)^2-4=x_1^2+2x_1\Delta x+(\Delta x)^2-4=x_1^2-4+2x_1\Delta x+(\Delta x)^2$.

$y_2=y_1+2x_1\Delta x+(\Delta x)^2$; kui $x_1\in X_1$, siis $y_2>y_1$.

Kui $x_1\in X_2$, siis $y_2<y_1$, sest $2x_1\Delta x<0$ ja $(\Delta x)^2<\Delta x$, sest Δx valitakse väike positiivne arv.

Funktsiooni graafik on tõusev kõver, kui $x>0$;

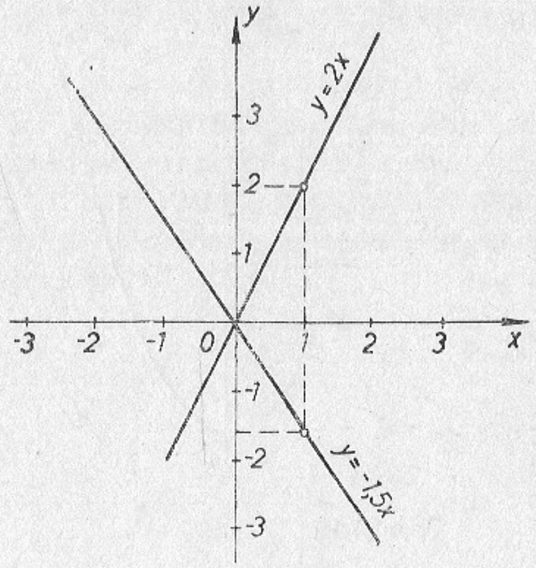
funktsiooni graafik on langev kõver, kui $x<0$.

7.5. FUNKTSIOON $y=ax$ (VÕRDELINE SEOS).

Funktsiooni $y=ax$, kus a on antud arv ja $a\neq 0$, iseloomustab muutujate vastavate väärtuste võrdelisus (võrdeline sõltuvus).

$$y=ax\Rightarrow\frac{y}{x}=a.$$

Funktsiooni $y=ax$ graafikuks on sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti, mille koordinaadid on (1; a).



Joon. 7.11

Kui $a>0$, siis funktsiooni $y=ax$ graafik on tõusev sirge, kui $a<0$, siis graafik on langev sirge.

Funktsiooni $y=ax$ määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk: $X=\mathbf{R}$.

Näited.

1. Võrdelises seoses on läbitud tee pikkus ja aeg jääva kiiruse korral. Kui auto liigub jääva kiirusega 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis x tunniga läbib ta $y=60x$ km.

2. $y=2x$;

x	0	1
y	0	2

3. $y=-1{,}5x$;

x	0	1
y	0	$-1{,}5$

(joon. 7.11).

7.6. FUNKTSIOON $y=ax+b$ (LINEAARNE SEOS).

Lineaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mida saab esitada valemina $y=ax+b$, kus a ja b on antud arvud.

Lineaarfunktsiooni graafik on sirge, mis läbib punkte koordinaatidega $(0;\ b)$ ja $(1;\ a+b)$.

Kui $a>0$, siis funktsiooni $y=ax+b$ graafik on tõusev sirge; kui $a<0$, siis graafik on langev sirge; kui $a=0$, siis graafik on x-teljega paralleelne sirge, mis läbib punkti $(0;\ b)$.

Funktsiooni $y=ax+b$ määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk.

Kui $b=0$, siis saame lineaarfunktsiooni erijuhuna funktsiooni $y=ax$, mille graafik on paralleelne funktsiooni $y=ax+b$ graafikuga.

Kui $a=b=0$, siis saame erijuhuna x-telje võrrandi $y=0$.

Lineaarfunktsiooni graafikut saab joonestada tema kahe mis tahes punkti koordinaatide järgi. Tihti on otstarbekas selleks kasutada graafiku lõikepunkte koordinaattelgedega $(0;\ b)$ ja $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$.

Näited.

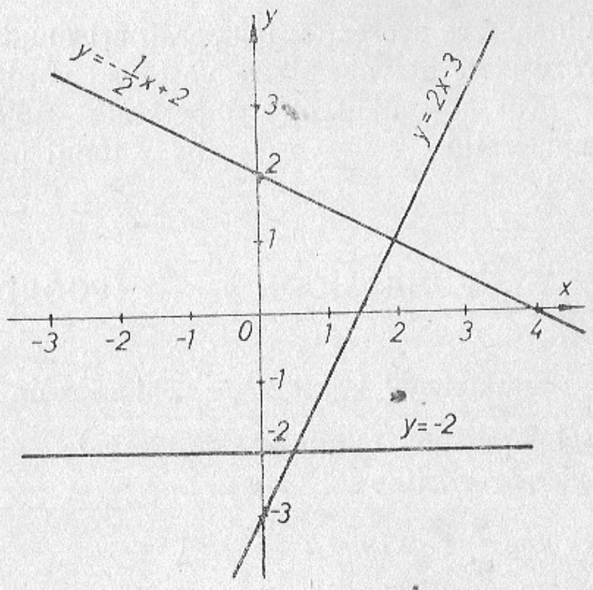
1) $y=2x-3$;

x	0	$1\frac{1}{2}$
y	-3	0

2) $y=-\frac{1}{2}x+2$

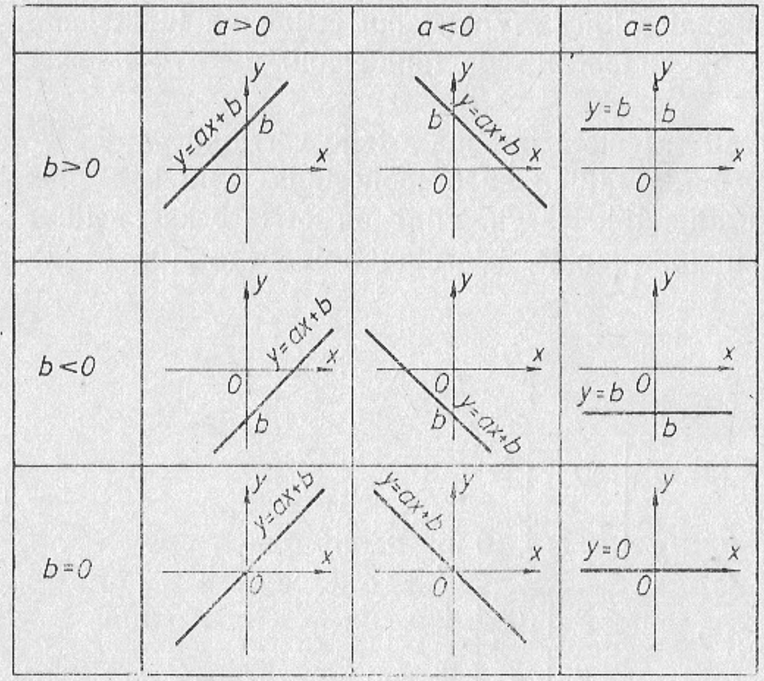
x	0	4
y	2	0

3) $y=-2$ (joon. 7.12).



Joon. 7.12

Kõik võimalikud juhud võtab kokku tabel joonisel 7.13.



Joon. 7.13

Näide.

Lineaarses seoses on temperatuuri muutumine sõltuvalt ajast, kui võrdsetele ajavahemikele vastavad võrdsed temperatuuri muudud.

Kui hommikul oli temperatuur —5°C ja iga tunniga tõuseb temperatuur 2 °C võrra, siis x tunni pärast on temperatuur $y=2x-5$.

7.7. FUNKTSIOON $y=\frac{a}{x}$ (PÖÖRDVÕRDELINE SEOS).

Funktsiooni kujul $y=\frac{a}{x}$, kus a on nullist erinev antud arv, iseloomustab muutujate vastavate väärtuste pöördvõrdelisus (pöördvõrdeline sõltuvus).

$y=\frac{a}{x} \Rightarrow x\cdot y=a.$

Funktsiooni $y=\frac{a}{x}$ graafik on hüperbool, mis koosneb kahest koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilisest harust.

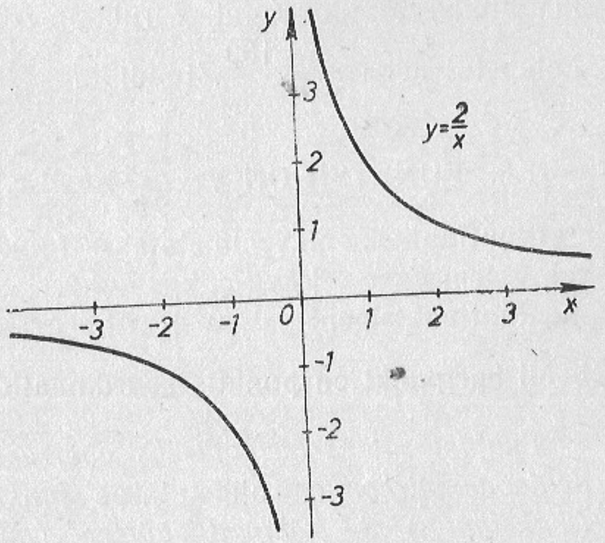
Kui $a>0$, siis asub hüperbool I ja III veerandis, kui $a<0$, siis II ja IV veerandis.

Funktsiooni $y=\frac{a}{x}$ määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk, välja arvatud $x=0$, mille korral funktsioonil puudub väärtus. Funktsiooni graafiku joonestamiseks tuleb koostada funktsiooni väärtuste tabel ja saadud arvupaaridele vastavad punktid koordinaatteljestikus sujuvalt ühendada. Kohal $x=0$ funktsiooni graafik katkeb.

1) $y=\frac{2}{x}$;

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

(joon. 7.14).

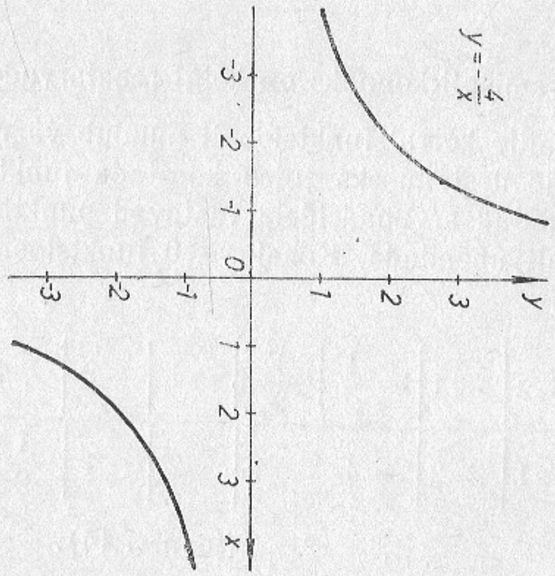


Joon. 7.14

2) $y=-\frac{4}{x}$.

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	1	2	4	-4	-2	-1

(joon. 7.15).



Joon. 7.15

Näide.

Töölise poolt valmistatud teatud kindla hulga toodangu valmistamiseks kulunud aeg ja ühes ajaühikus valmistatud toodangu hulk on pöördvõrdelises seoses.

Kui tööline peab andma toodangut 100 rubla eest ja ühes tunnis annab ta toodangut x rubla eest, siis ülesande täitmiseks kulub tal aega $y=\frac{100}{x}$ tundi.

7.8. FUNKTSIOON $y=ax^2+bx+c$.

Ruutfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mida üldkujul esitab valem $y=ax^2+bx+c$, kus $a\neq 0$.

Ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafikuks on parabool. Parabooli haripunkt on punktis koordinaatidega $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Funktsiooni ekstremaalseks väärtuseks (ekstreemumiks) vaadeldavas piirkonnas nimetatakse *funktsiooni suurimat väärtust (maksimum)* või *vähimat väärtust (miinimum)*. Ruutfunktsiooni

ekstremaalseks väärtuseks on $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$; kui $x=-\frac{b}{2a}$.

Funktsiooni **suurimat väärtust nimetatakse maksimumiks, vähimat miinimumiks.** Funktsiooni maksimaalset väärtust tähistatakse y_{max} ja minimaalset väärtust y_{min}.

Ruutfunktsiooni määramispiirkonnaks on hulk: $X=\mathbf{R}$.

Ruutfunktsiooni graafiku joonestamiseks tuleb koostada funktsiooni väärtuste tabel ja saadud arvupaaridele vastavad punktid koordinaatteljestikus sujuvalt ühendada. Saadud joont nimetatakse **paraboliks.**

Parabooli teljeks nimetatakse parabooli sümmeetriatelge. (joon. 7.17. on funktsiooni $y=ax^2$ teljeks y-telg)

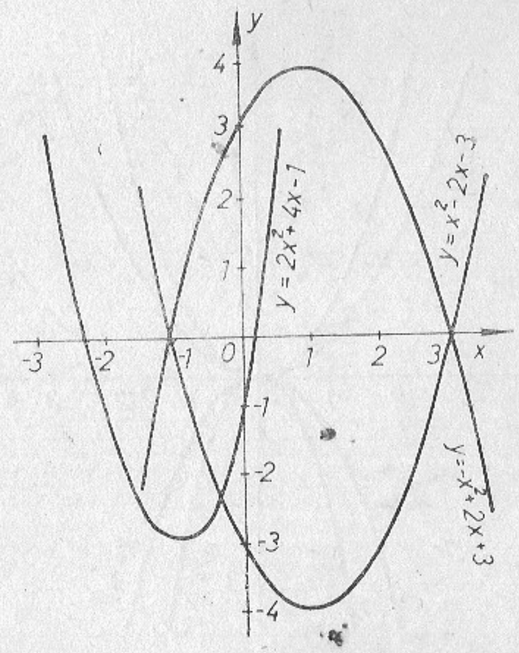
Parabooli haripunktiks nimetatakse parabooli telje ja parabooli lõikepunkti.

Näited.

1) $y=x^2-2x-3$;

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

.



Joon. 7.16

2) $y=-x^2+2x+3$;

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5

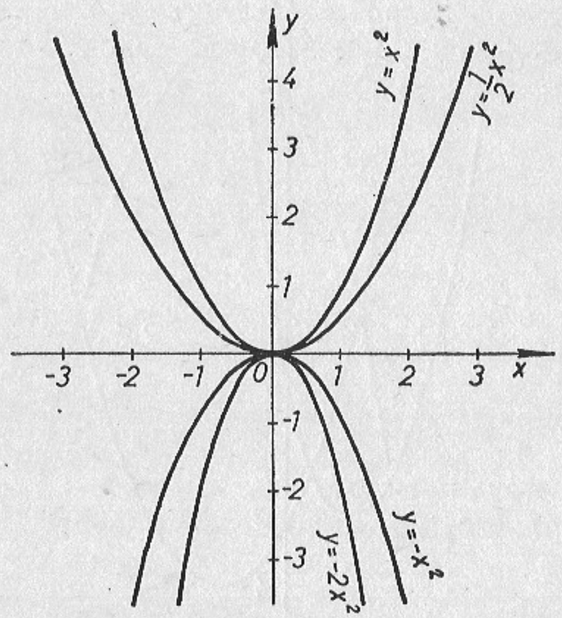
3) $y=2x^2+4x-1$;
(joon. 7.16)

x	-3	-2	-1	0	1
y	5	-1	-3	-1	5

Kui $a>0$, siis parabool avaneb ülespoole ja funktsioonil on minimaalne väärtus. Kui $a<0$, siis parabool avaneb allapoole ja funktsioonil on maksimaalne väärtus. Mida suurem on a absoluutväärtus, seda kitsam on parabool.

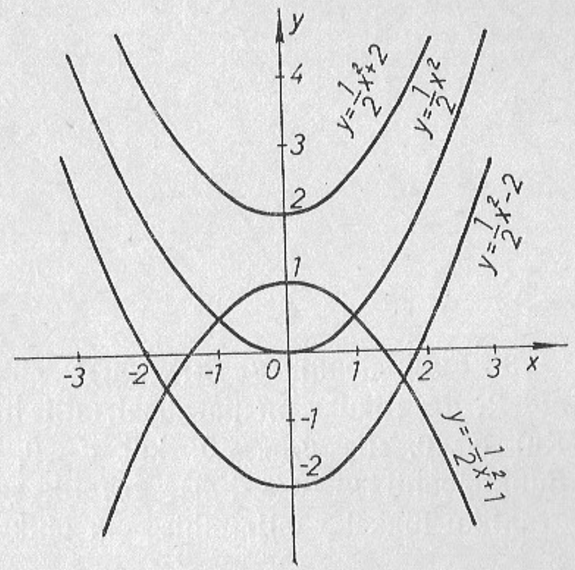
Ruutfunktsiooni erijuhud.

1. Kui $b=0$ ja $c=0$, siis ruutfunktsioonil on kuju $y=ax^2$. Sellise ruutfunktsiooni graafikuks on parabool, mille teljeks on y-telg ja haripunkt on (0; 0). Kui
$a>0$, siis $y_{min}=0$; kui $a<0$, siis $y_{max}=0$ (joon. 7.17).

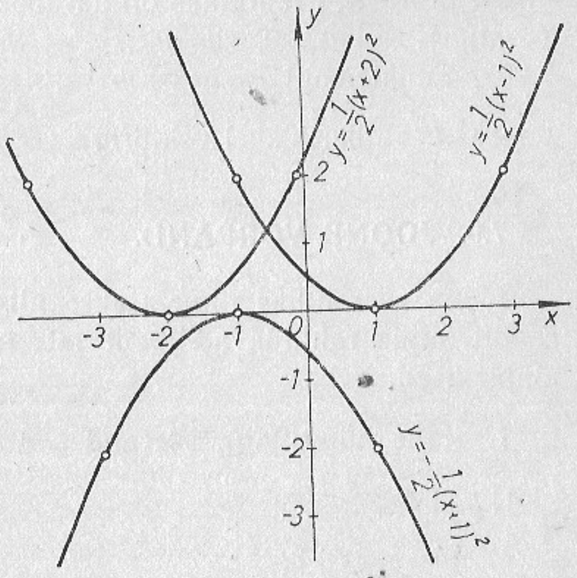


Joon. 7.17

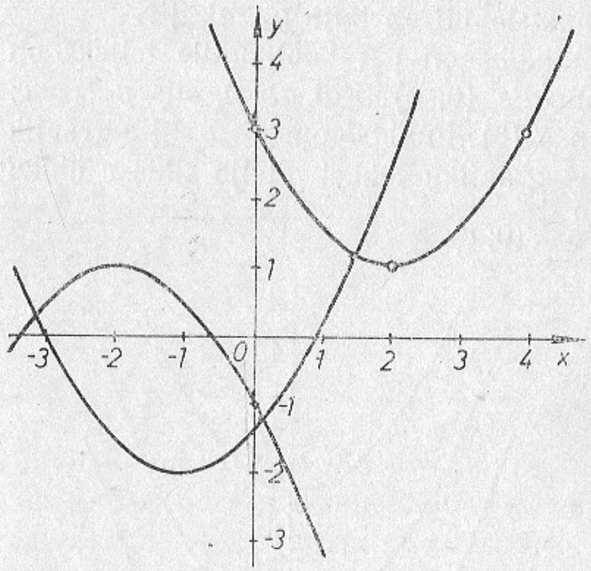
2. Kui $b=0$, siis ruutfunktsioonil on kuju $y=ax^2+c$. Sellise ruutfunktsiooni graafikuks on parabool, mille teljeks on y-telg ja haripunkt asub punktis (0; c). Kui $a>0$, siis $y_{min}=c$; kui $a<0$, siis $y_{max}=c$ (joon. 7.18). Funktsiooni $y=ax^2+c$ graafik saadakse funktsiooni $y=ax^2$ graafiku lükkel y-telje sihis c ühiku võrra ehk lükkel vektoriga $\vec{v}=(0; c)$.



Joon. 7.18



Joon. 7.19



Joon. 7.20

3. Funktsiooni $y=a(x+m)^2$ ehk $y=ax^2+2amx+am^2$, kus $m\in R$, graafikuks on parabool, mille haripunkt on punktis $(-m; 0)$. Kui $a>0$, siis $y_{min}=0$; kui $a<0$, siis $y_{max}=0$ (joon. 7.19). Funktsioonil $y=a(x+m)^2$ graafik saadakse funktsiooni $y=ax^2$ graafiku lükkel x-telje sihis $-m$ ühiku võrra ehk lükkel vektoriga $\vec{v}=(-m; 0)$.

Funktsiooni $y=a(x+m)^2+n$ ehk $y=ax^2+2amx+am^2+n$, kus $m\in R$ ja $n\in R$, graafikuks on parabool, mille haripunkt on punktis $(-m; n)$. Kui $a>0$, siis $y_{min}=n$; kui $a<0$, siis $y_{max}=n$ (joon. 7.20). Funktsiooni $y=a(x+m)^2+n$ graafik saadakse funktsiooni $y=ax^2$ graafiku lükkel vektoriga $\vec{v}=(-m; n)$.

7.9. JOONE VÕRRAND.

Joone võrrandiks nimetatakse niisugust kahe muutujaga võrrandit, mida rahuldavad joone mis tahes punkti koordinaadid ja ainult need.

1. Kahe muutujaga võrrand $y=ax+b$ on sirge võrrand.

Näited.

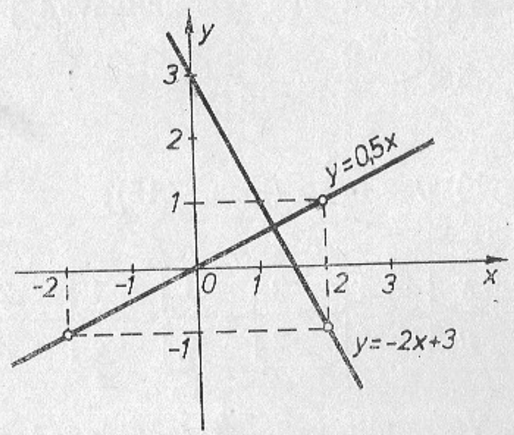
a) $y=-2x+3$.

Sirge joonestamiseks piisab selle sirge kahe punkti koordinaatide leidmisest:

x	0	$1\frac{1}{2}$
y	3	0

;

Võrrandit $y=-2x+3$ rahuldavad punktid $A(2; -1)$ koordinaadid: $-1=-2\cdot 2+3$; $-1=-1$ (joon. 7.21).



Joon. 7.21

b) $y=\frac{1}{2}x$;

x	0	2
y	0	1

.

Võrrandit $y=\frac{1}{2}x$ rahuldavad punkti $B(-2; -1)$ koordinaadid: $-1=\frac{1}{2}\cdot(-2)$; $-1=-1$.

2. Kahe muutujaga võrrand $y=\frac{a}{x}$ ehk $xy=a$ on hüperbooli võrrand. Hüperbooli joonestamiseks leitakse mõned hüperbooli punktide koordinaadid, kantakse need teljestikku ja ühendatakse sujuva joonega. Joon ei lõika koordinaattelgi, vaid pikendamisel läheneb järjest telgedele. Kui $a>0$, siis asub hüperbool I ja III veerandis; kui $a<0$, siis asub hüperbool II ja IV veerandis.

Näited

a) $y=\frac{2}{x}$ (joon. 7.14);

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

Võrrandit $y=\frac{2}{x}$ rahuldavad punkti $A\left(-3;\ -\frac{2}{3}\right)$ koordinaadid: $-\frac{2}{3}=\frac{2}{-3}$.

b) $y=\frac{-4}{x}$ (joon. 7.15);

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	1	2	4	-4	-2	-1

Võrrandit $y=\frac{-4}{x}$ rahuldavad punkti $B\left(1\frac{1}{3};\ -3\right)$ koordinaadid: $-3=\frac{-4}{1\frac{1}{3}}$; $-3=\frac{-4}{\frac{4}{3}}$; $-3=-3$.

3. Kahe muutujaga võrrand $y=ax^2+bx+c$ on parabooli võrrand (jaot. 7.8.).

4. Joone võrrand $2x^2-xy+y^2=4$.

1. Kontrollime, kas antud joon läbib punkti $A(1;2)$ ja $B(1;-1)$ ehk kas antud punktid asuvad joonel $2x^2-xy+y^2=4$.

Asendame A koordinaadid antud võrrandisse:

$2\cdot1^2-1\cdot2+2^2=2-2+4=4$; $4=4$.

Asendame B koordinaadid antud võrrandisse:

$2\cdot1-1\cdot(-1)+(-1)^2=2+1+1=4$; $4=4$.

Kuna saadud võrdused on tõesed, siis joon läbib punkte A ja B.

2. Kontrollime, kas punkt $C(3;-1)$ asub antud joonel.

Asendame C koordinaadid antud võrrandisse:

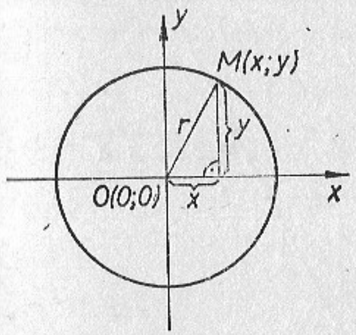
$2\cdot3^2-3\cdot(-1)+(-1)^2=18+3+1=22$; $22\neq4$.

Kuna punkti C koordinaadid ei rahuldanud antud võrrandit, siis punkt C ei asu antud joonel.

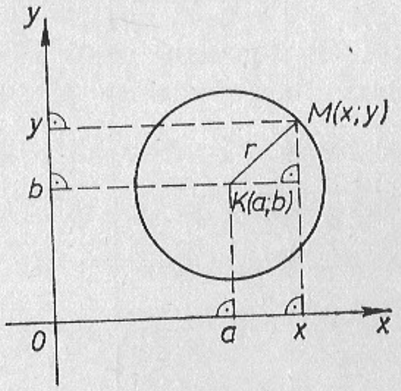
5. Ringjoone võrrand.

1. Olgu ringjoone keskpunkt $O(0;0)$ ja ringjoone raadius r, siis ringjoone võrrand on $x^2+y^2=r^2$ (joon. 7.22).

2. Olgu ringjoone keskpunkt $K(a;b)$ ja ringjoone raadius r, siis ringjoone võrrand on $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (joon. 7.23).



Joon. 7.22



Joon. 7.23

Näited.

a) Ringjoone keskpunkt on $K(-2;3)$ ja raadius $r=5$.

Leia ringjoone võrrand.

$[x-(-2)]^2+(y-3)^2=5^2$; $(x+2)^2+(y-3)^2=25$;
$x^2+4x+4+y^2-6y+9-25=0$; $x^2+y^2+4x-6y-12=0$.

b) Ringjoone võrrand on $x^2+y^2+4x-6y-12=0$.

Leia ringjoone keskpunkt ja raadius.

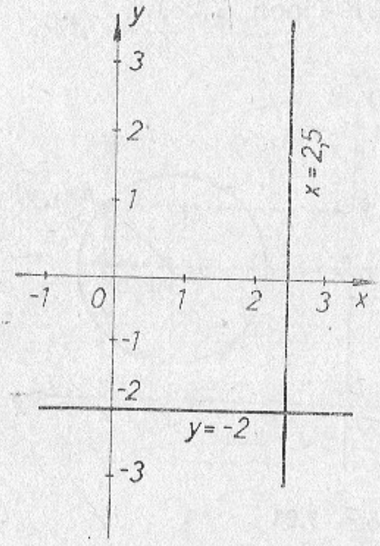
$x^2+4x+4+y^2-6y+9-12-13=0$; $(x+2)^2+(y-3)^2=25$;
$K(-2;3)$ ja $r=5$.

6. Telgede ja telgedega paralleelsete sirgete võrrandid.

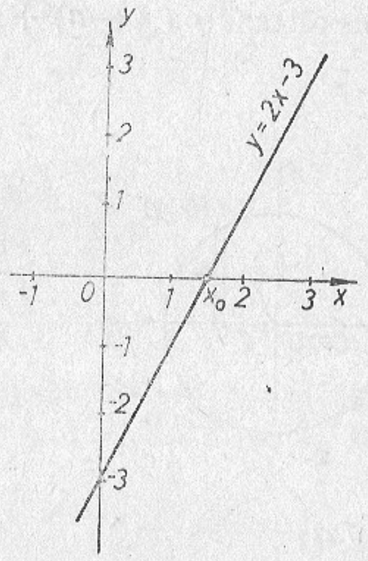
x-telje võrrand on $y=0$.
y-telje võrrand on $x=0$.
x-teljega paralleelse, punkti $(0; n)$ läbiva sirge võrrand on $y=n$.
y-teljega paralleelse, punkti $(m; 0)$ läbiva sirge võrrand on $x=m$.

Näited.

a) $x=2{,}5$ on y-teljega paralleelse sirge võrrand.
b) $y=-2$ on x-teljega paralleelse sirge võrrand (joon. 7.24).



Joon. 7.24



Joon. 7.25

7.10. VÕRRANDI LAHENDAMINE GRAAFIKU ABIL.

1. Lineaarvõrrandi lahendamine graafiku abil.

Ühe muutujaga lineaarvõrrandi $ax=b$ lahendamine graafiku abil tähendab funktsiooni $y=ax-b$ nullkoha leidmist.

Näide.

Lahendame võrrandi $2x=3$ graafiliselt. Moodustame funktsiooni $y=2x-3$. Leiame sirge kahe punkti koordinaadid:

x	0	2
y	-3	1

Ühendades saadud punktid koordinaatteljestikus leiame, et graafik lõikab x-telge ligikaudu kohal $x_0=1{,}5$ (joon. 7.25).

Vastus. $x=1{,}5$.

2. Ruutvõrrandi lahendamine graafiku abil.

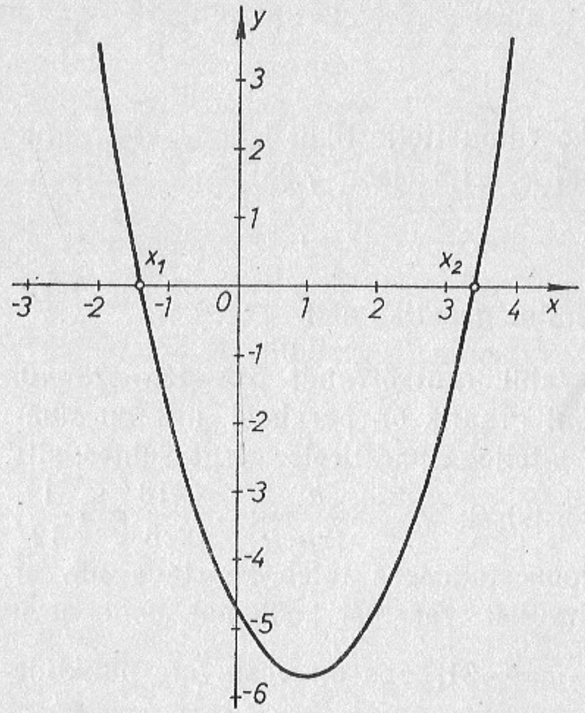
1. Lahendame graafiku abil ruutvõrrandi $6x^2-13x-28=0$. Kuna vastava ruutfunktsiooni graafik on parabool, mis on sümmeetriline haripunkti läbiva y-teljega paralleelse sirge suhtes, siis leiame esiteks haripunkti abstsissi: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-13}{2\cdot 6}=1\frac{1}{12}$. Väärtuste tabel graafiku joonestamiseks tuleb koostada nii, et argumendile antakse täisarvulisi väärtusi mõlemal pool arvu $x=1\frac{1}{12}$. Et $x=1$ korral $y=-31$, siis on vastavate punktide märkimine teljestikku tülikas. Jagame võrrandi mõlemat poolt arvuga 6, see ei muuda lahendeid. Saame võrrandi $x^2-2\frac{1}{6}x-4\frac{2}{3}=0$. Vastav ruutfunktsioon on $y=x^2-2\frac{1}{6}x-4\frac{2}{3}$. Koostame väärtuste tabeli, valides keskmiseks argumendi väärtuseks arvu 1, mis on haripunkti abstsissile kõige lähem:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$3\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{2}$	$-4\frac{2}{3}$	$-5\frac{5}{6}$	-5	$-2\frac{1}{6}$	$2\frac{2}{3}$

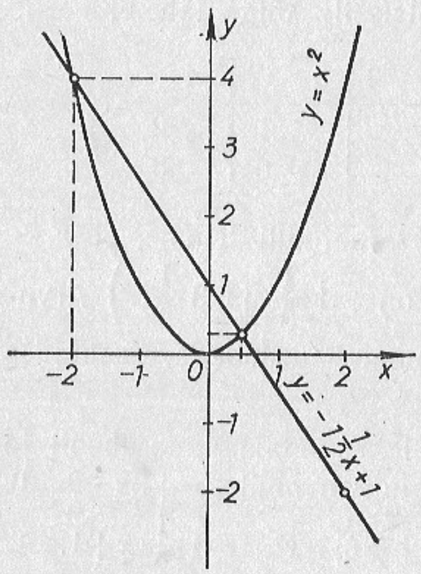
Joonestame graafiku (joon. 7.26). Graafikult leiame, et $x_1\approx -1{,}3$; $x_2\approx 3{,}5$. $\left(\text{Täpsed lahendid on } -1\frac{1}{3} \text{ ja } 3\frac{1}{2}.\right)$ Arvutused võib teostada ligikaudu ka kümnendmurdudega, kasutades arvutuslükatit.

2. Otstarbekam on ruutvõrrandit lahendada põhiparabooli ja sirge abil. Lahendame graafiku abil ruutvõrrandi $2x^2+3x-2=0$.

$2x^2+3x-2=0 \mid :2$; $x^2+1\frac{1}{2}x-1=0$; $x^2=-1\frac{1}{2}x+1$.



Joon. 7.26



Joon. 7.27

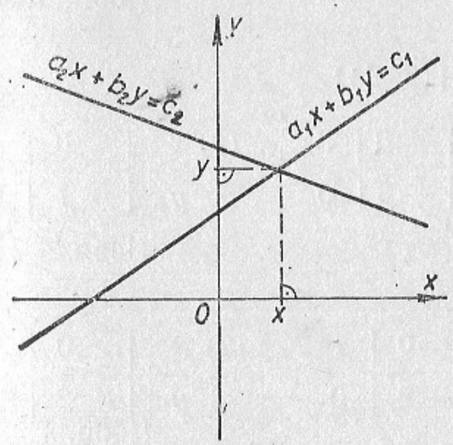
Nüüd jääb leida need argumendi väärtused, mille puhul funktsioonide $y=x^2$ ja $y=-1\frac{1}{2}x+1$ väärtused on võrdsed. Selleks koostame mõlema funktsiooni väärtuste tabelid ja joonestame graafikud (joon. 7.27). Võrrandi lahendiks on arvud $x_1=-2$ ja $x_2=\frac{1}{2}$; sest nende argumendi väärtuste korral on mõlema funktsiooni väärtused võrdsed.

7.11. VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE GRAAFIKU ABIL.

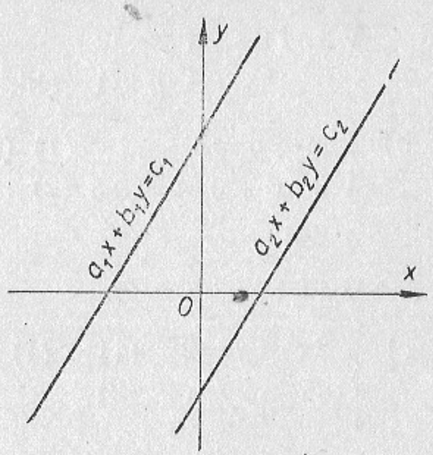
1. Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine graafiku abil.

Lineaarvõrrandisüsteemi $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

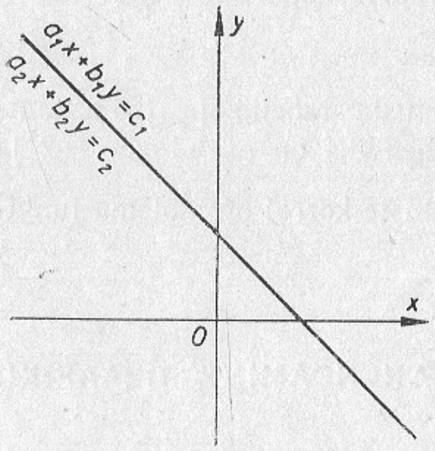
lahendamiseks graafiku abil joonestame ühes ja samas koordinaatteljestikus antud süsteemi mõlema võrrandi graafikud. Saadud sirged lõikuvad, kui $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ning võrrandisüsteemil on sel juhul üks lahend, milleks on sirgete lõikepunkti koordinaadid (joon. 7.28). Saadud sirged on paralleelsed, kui $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ning sel juhul võrrandisüsteemil lahend puudub (joon. 7.29).



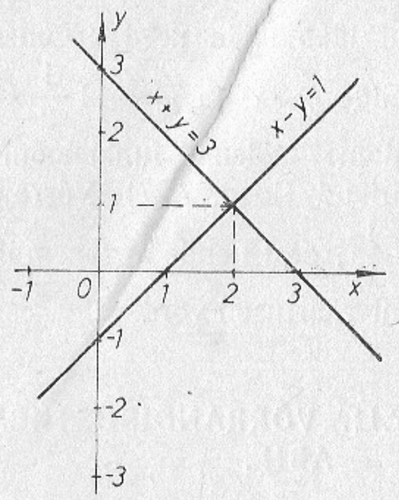
Joon. 7.28



Joon. 7.29



Joon. 7.30



Joon. 7.31

Saadud sirged ühtivad, kui $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ning sel juhul on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid (joon. 7.30).

Näited.

Lahendame järgmised võrrandisüsteemid graafiku abil.

a) $\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{cases}$ (1) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$; (2) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$

(joon. 7.31).

Vastus. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ehk $L=\{(2;\ 1)\}$.

b) $\begin{cases} x-y=3 & (1) \\ 0{,}5x-0{,}5y=0{,}5 & (2) \end{cases}$ (1) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array}$; (2) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$

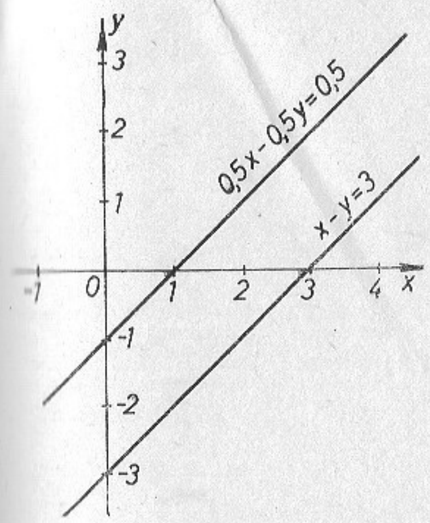
(joon. 7.32).

Vastus. $L=\emptyset$.

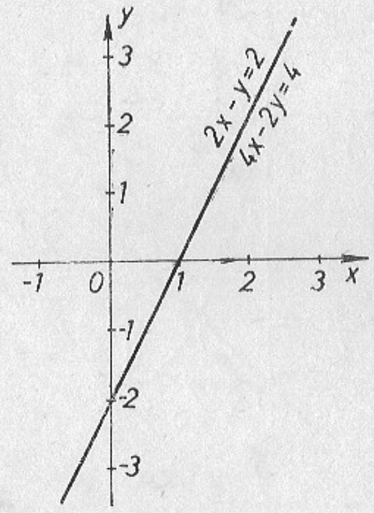
c) $\begin{cases} 2x-y=2 & (1) \\ 4x-2y=4 & (2) \end{cases}$ (1) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$; (2) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$

(joon. 7.33).

Vastus. $L=\mathbf{R}$.



Joon. 7.32



Joon. 7.33

2. Ruutvõrrandisüsteemi lahendamine graafiku abil.

Joonestame ühes ja samas koordinaatteljestikus süsteemi mõlema võrrandi graafikud. Saadud joonte lõikepunktide koordinaadid on ruutvõrrandisüsteemi lahendiks. Kui süsteemi kuulub üks teise astme võrrand ja üks lineaarvõrrand, siis on süsteemil maksimaalselt kaks lahendit; kui mõlemad on teise astme võrrandid, siis on süsteemil maksimaalselt neli lahendit.

Võrrandit loetakse teise astme võrrandiks siis, kui vähemalt ühes võrrandi liikmes on muutujate astendajate summa kaks, kuid mitte suurem. Võrrandid $x^2+y=0$; $x^2-2y^2+3x=5$; $xy=3$; $xy+2y-x=2$ jne. on teise astme võrrandid.

Näited.

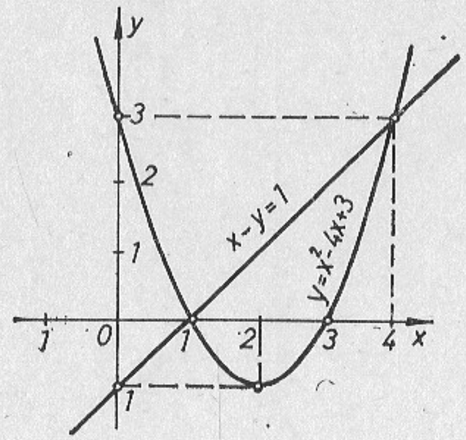
Lahendame järgmised ruutvõrrandisüsteemid graafiku abil.

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$ (joon. 7.34).

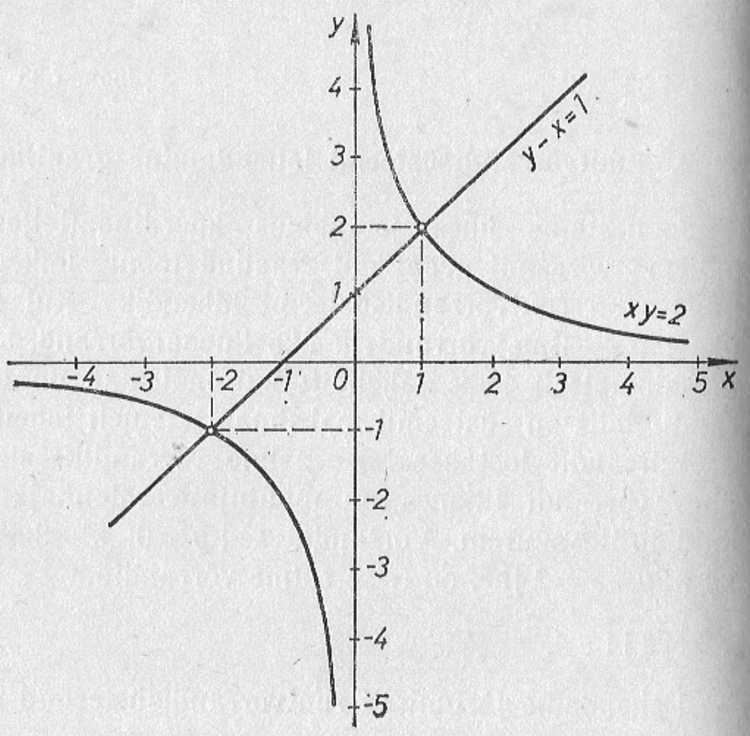
Vastus. $L=\{(1;0);\ (4;3)\}$.

b) $\begin{cases} y-x=1 \\ xy=2 \end{cases}$ (joon. 7.35).

Vastus. $L=\{(1;2);\ (-2;-1)\}$.



Joon. 7.34



Joon. 7.35

c) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases}$ (joon. 7.36).

Vastus. $L=\{(1{,}8;\,-0{,}8);\ (-0{,}8;\,1{,}8)\}$.

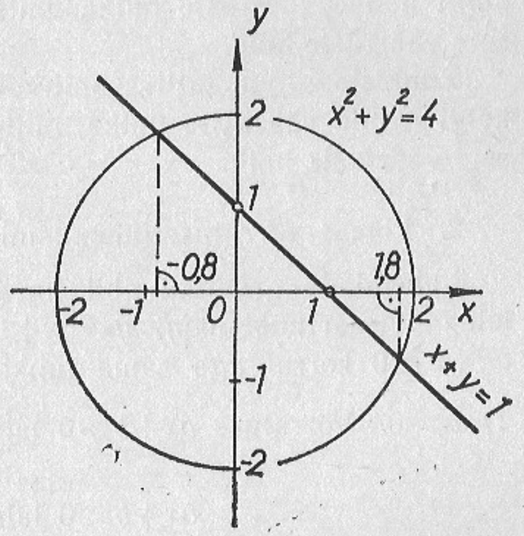
d) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$ (joon. 7.37).

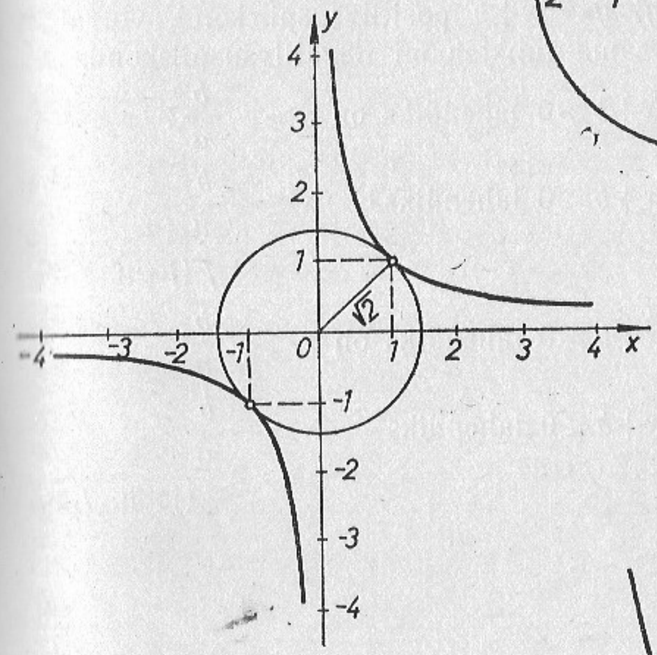
Vastus. $L=\{(1;1);\ (-1;-1)\}$.

e) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2-2 \end{cases}$ (joon. 7.38).

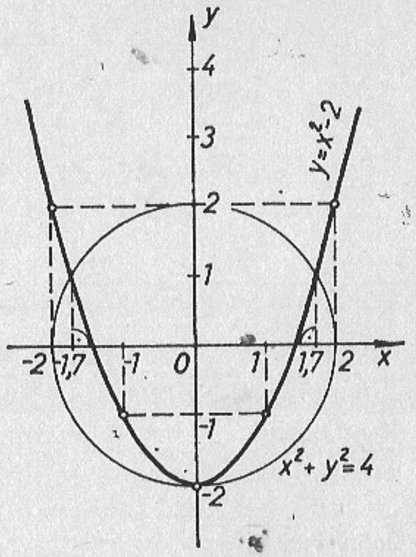
Vastus. $L=\{(0;\,-2);\ (1{,}7;\,1);\ (-1{,}7;\,1)\}$.

Joon. 7.36





Joon. 7.37



Joon. 7.38

7.12. VÕRRATUSE LAHENDAMINE GRAAFIKU ABIL.

1. Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond.

Funktsiooni positiivsuspiirkonnaks nimetatakse argumendi kõigi nende väärtuste hulka, millele vastab funktsiooni positiivsete väärtuste hulk.

Funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks nimetatakse argumendi kõigi nende väärtuste hulka, millele vastab funktsiooni negatiivsete väärtuste hulk.

2. Lineaarvõrratuse lahendamine graafiku abil.

Lahendada graafiku abil lineaarvõrratus $ax+b>0$ tähendab leida lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ positiivsuspiirkond, võrratuse $ax+b<0$ korral aga sama funktsiooni negatiivsuspiirkond.

1) $a>0$. Võrratuse $ax+b>0$ lahendiks on $x>-\frac{b}{a}$;

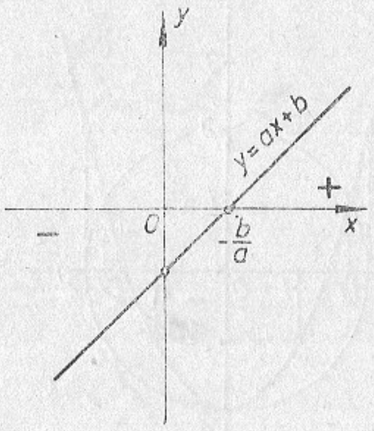
$ax+b<0$ lahendiks $x<-\frac{b}{a}$

(joon. 7.39).

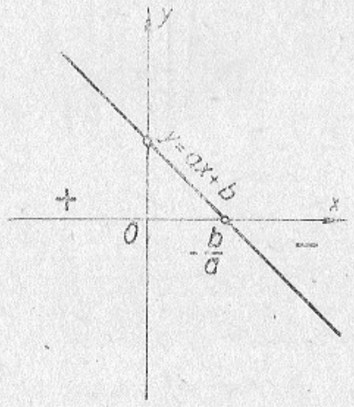
2) $a<0$. Võrratuse $ax+b>0$ lahendiks on $x<-\frac{b}{a}$;

$ax+b<0$ lahendiks $x>-\frac{b}{a}$

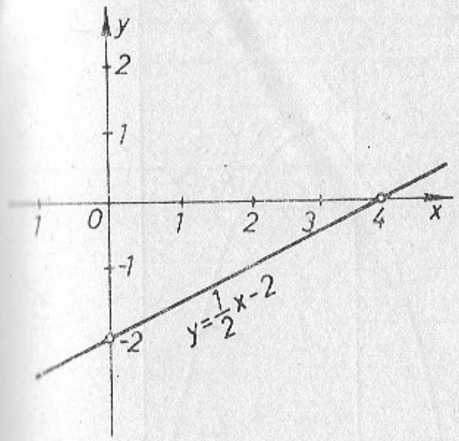
(joon. 7.40).



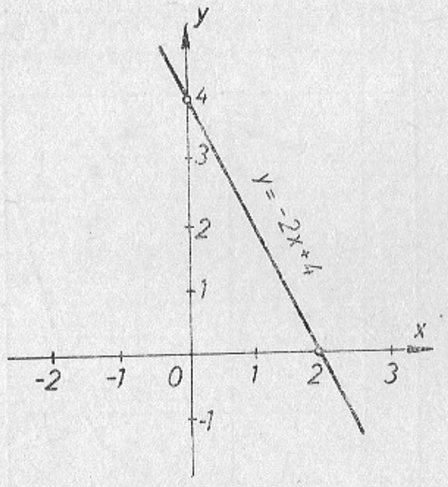
Joon. 7.39



Joon. 7.40



Joon. 7.41



Joon. 7.42

N ä i t e d.

Lahendame graafiku abil võrratused

a) $\frac{1}{2}x-2<0$; b) $-2x+4>0$.

a) Moodustame funktsiooni $y=\frac{1}{2}x-2$ ja joonestame selle graafiku:

x	0	4
y	−2	0

(joon. 7.41). Siit $L=\{x|x<4\}$.

b) Moodustame funktsiooni $y=-2x+4$ ja joonestame selle graafiku:

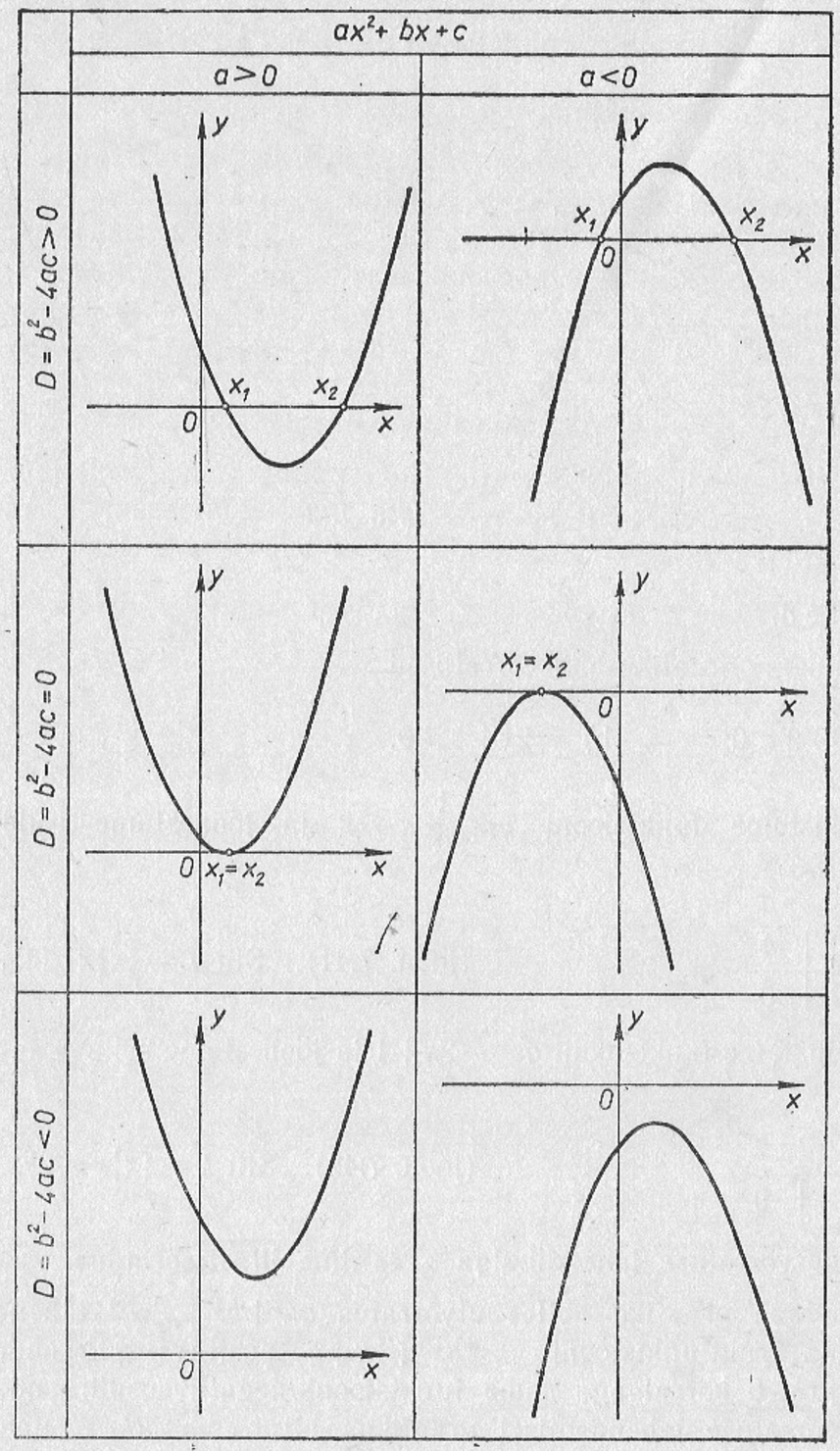
x	0	2
y	4	0

(joon. 7.42). Siit $L=\{x|x<2\}$.

3. Ruutvõrratuse lahendihulga graafiline illustreerimine.

Lahendada graafiku abil ruutvõrratus $ax^2+bx+c>0$ tähendab leida ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ positiivsuspiirkond, $ax^2+bx+c<0$ korral aga sama funktsiooni negatiivsuspiirkond.

Ruutvõrratuse lahendamisel graafiku abil teeme kõige enne kindlaks, kas $b^2-4ac>0$, $b^2-4ac=0$, või $b^2-4ac<0$.



Joon. 7.43

Seejärel kirjutame joonise 7.43 järgi üles võrratuse lahendi. Ruutvõrratuse lahendihulga määramise võimalused vastavalt kordajatele on koondatud järgmisse tabelisse.

Ruutvõrratus		Ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$: Kaks lahendit, $x_1<x_2$	Ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$: Kaks lahendit, $x_1=x_2=x_0$	Lahendid puuduvad
$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x<x_0 \vee x>x_0$	$L=\mathbf{R}$
	$a<0$	$x_1<x<x_2$	$L=\varnothing$	$L=\varnothing$
$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$x_1<x<x_2$	$L=\varnothing$	$L=\varnothing$
	$a<0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x<x_0 \vee x>x_0$	$L=\mathbf{R}$

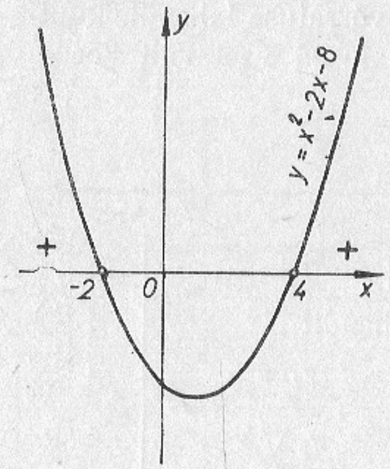
Ruutvõrratuse $ax^2+bx+c\gtrless 0$ lahendamiseks graafiku abil.

1) skitseerime funktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafiku. Selleks
   a) kontrollime, kas $a>0$ või $a<0$;
   b) arvutame ruutfunktsiooni nullkohad x_1 ja x_2;
   c) skitseerime graafiku.
2) loeme jooniselt vajaliku piirkonna.

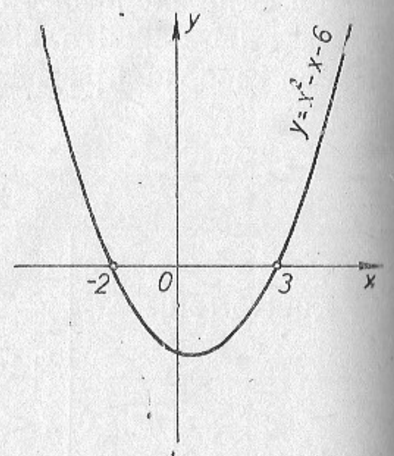
Näited.

1. Lahendame võrratuse $x^2-2x-8>0$ (joon. 7.44).
   $b^2-4ac=4+32>0$; $x_1=-2$; $x_2=4$;
   $L=\{x \mid x<-2 \vee x>4\}$.

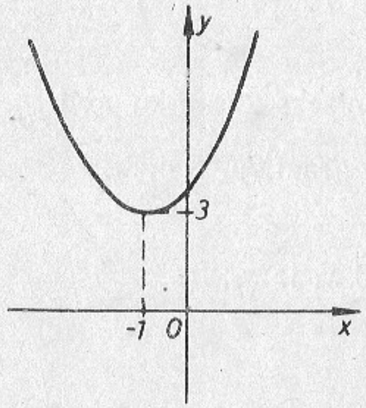
2. Lahendame võrratuse $x^2-x-6<0$ (joon. 7.45).
   $b^2-4ac=1+24>0$; $x_1=-2$; $x_2=3$;
   $L=\{x \mid -2<x<3\}$.



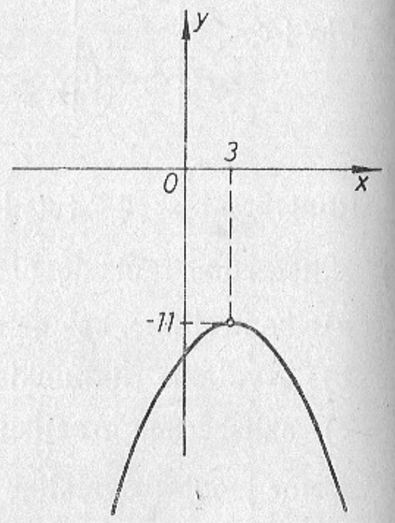
Joon. 7.44



Joon. 7.45



Joon. 7.46



Joon. 7.47

3. Lahendame võrratuse $x^2+2x+4<0$ (joon. 7.46).

Graafiku skitseerimiseks võib lisaks nullkohtadele leida ka parabooli haripunkti koordinaadid (jaot. 7.8.).

$b^2-4ac=4-16<0$; $x_{min}=-\frac{2}{2\cdot 1}=-1$; $y_{min}=3$;

$L=\emptyset$.

4. Lahendame võrratuse $-x^2+6x-20<0$ (joon. 7.47).

$b^2-4ac=36-80<0$; $x_{max}=-\frac{6}{2\cdot(-1)}=3$;

$y_{max}=-9+18-20=-11$; $L=\mathbf{R}$.

7.13. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID, NENDE RAKENDUSI.

1. Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga siinuseks nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet.

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $\sin\beta=\frac{b}{c}$ (joon. 7.48).

Täisnurkse kolmnurga teravnurga koosinuseks nimetatakse selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet.

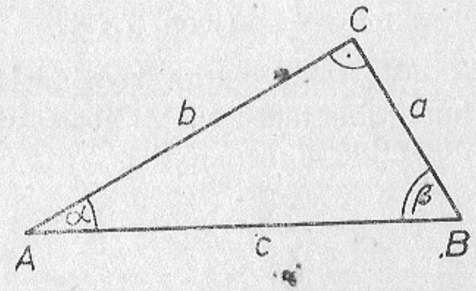
$\cos\alpha=\frac{b}{c}$; $\cos\beta=\frac{a}{c}$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga tangensiks nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet.

$\tan\alpha=\frac{a}{b}$; $\tan\beta=\frac{b}{a}$.

Täisnurkse kolmnurga teravnurga kootangensiks nimetatakse selle nurga lähiskaateti ja vastaskaateti suhet.

$\cot\alpha=\frac{b}{a}$; $\cot\beta=\frac{a}{b}$.



Joon. 7.48

Kaht antud nurka nimetatakse teineteise täiendusnurkadeks, kui nende summa on 90°.

Täisnurkses kolmnurgas (joon. 7.48) $\alpha+\beta=90°$, järelikult α ja β on teineteise täiendusnurgad.

Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide defineerimisel kasutasime täisnurkset kolmnurka, kus $\alpha+\beta=90°$ ja $\beta=90°-\alpha$. Sellises kolmnurgas kehtivad järgmised seosed nurga ja tema täiendusnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahel.

$\sin\alpha=\cos\beta$ ehk $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$;

$\cos\alpha=\sin\beta$ ehk $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$;

$\tan\alpha=\cot\beta$ ehk $\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan(90°-\alpha)}=\cot(90°-\alpha)$;

$\cot\alpha=\tan\beta$ ehk $\cot\alpha=\dfrac{1}{\cot(90°-\alpha)}=\tan(90°-\alpha)$.

Järelikult teravnurga siinus võrdub selle nurga täiendusnurga koosinusega; teravnurga koosinus võrdub selle nurga täiendusnurga siinusega; teravnurga tangens võrdub selle nurga täiendusnurga tangensi pöördväärtusega ehk selle nurga täiendusnurga kootangensiga; teravnurga kootangens võrdub selle nurga täiendusnurga kootangensi pöördväärtusega ehk selle nurga täiendusnurga tangensiga.

Näited.

$\sin 30°=\cos(90°-30°)=\cos 60°$.

$\tan 25°=\dfrac{1}{\tan(90°-25°)}=\dfrac{1}{\tan 65°}$.

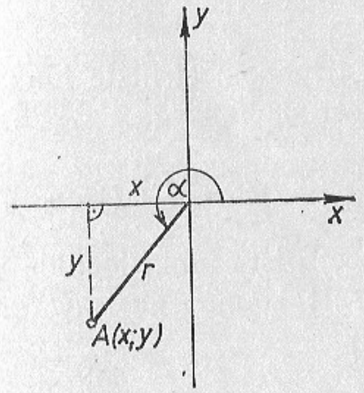
2. Mis tahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Mis tahes nurga siinuseks nimetatakse selle nurga lõpphaara mis tahes punkti ordinaadi suhet selle punkti kaugusse koordinaatide alguspunktist.

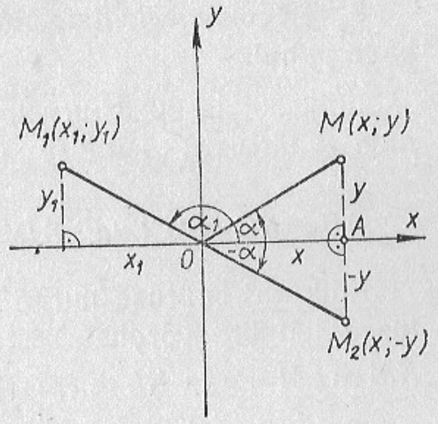
$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$ (joon. 7.49).

Mis tahes nurga koosinuseks nimetatakse selle nurga lõpphaara mis tahes punkti abstsissi suhet selle punkti kaugusse koordinaatide alguspunktist.

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$.



Joon. 7.49



Joon. 7.50

Mis tahes nurga tangensiks nimetatakse selle nurga lõpphaara mis tahes punkti ordinaadi suhet sama punkti abstsississe, kui abstsissi väärtus ei ole null.

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

Mis tahes nurga kootangensiks nimetatakse selle nurga lõpphaara mis tahes punkti abstsissi suhet sama punkti ordinaadisse, kui ordinaadi väärtus ei ole null.

$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$.

Nurga α lõpphaara mis tahes punkti M kohavektoriks on $\overrightarrow{OM}$, ja selle koordinaatideks on $x=r\cos\alpha$ ja $y=r\sin\alpha$ (joon. 7.50). Kui $|\overrightarrow{OM}|=1$, siis $\overrightarrow{OM}=(\cos\alpha;\sin\alpha)$.

Ühikvektori koordinaatideks on ühikvektori ja x-telje positiivse pooltelje vahelise nurga koosinus ja siinus.

Ühikvektor, pöördudes kellaosuti suunas, moodustab *negatiivse nurga* ($-\alpha$ joonisel 7.50). Kolmnurkade OAM ja OAM_2 võrdlemisest selgub, et $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, järelikult $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$,

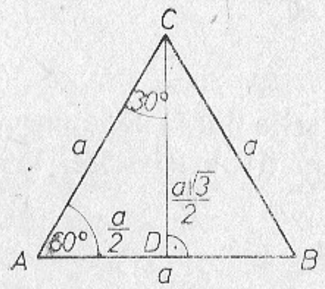
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$.

3. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused mõningate nurkade puhul.

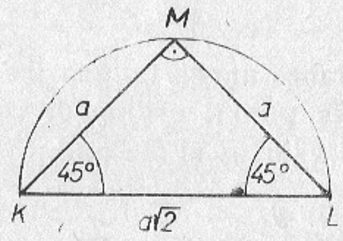
Kõik 30° ja 60° suuruste nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused leitakse võrdkülgsest kolmnurgast ABC, kus

$AB=BC=AC=a$, $AD=DB=\frac{a}{2}$ ja $DC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (joon. 7.51).

Kõik 45° suuruse nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused leitakse võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast KLM, kus $KM=LM=a$ ja $KL=a\sqrt{2}$ (joon. 7.52).



Joon. 7.51



Joon. 7.52

Tulemused võtab kokku järgmine tabel.

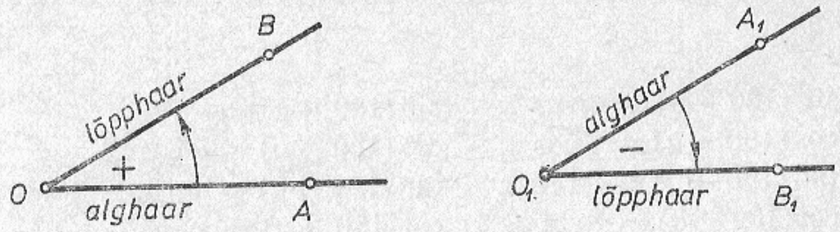
	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Väärtus puudub
$\cot\alpha$	Väärtus puudub	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7.14. POSITIIVSED JA NEGATIIVSED NURGAD.

Nurka võib vaadelda kahe ühisest alguspunktist lähtuva kiire vahelise kujundina, lugedes üht kiirtest **nurga alghaaraks** e. liikumatuks haaraks, teist **nurga lõpphaaraks**, e. liikuvaks haaraks.

Nurka nimetatakse **positiivseks**, kui lõpphaar on pöördunud kellaosuti liikumise vastassuunas ja **negatiivseks**, kui lõpphaar on pöördunud kellaosuti liikumise suunas.

Nii on $\angle AOB$ positiivne nurk ja $\angle A_1O_1B_1$ negatiivne nurk. (joon. 7.53).



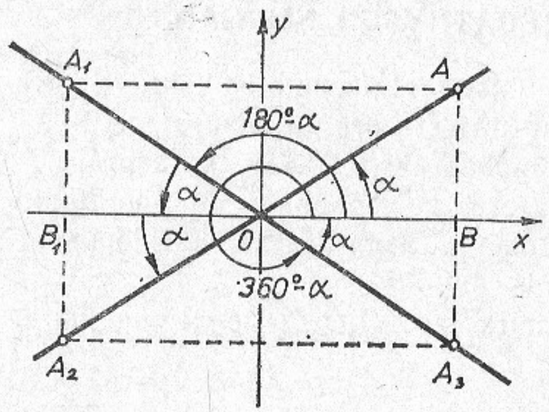
Joon. 7.53

Kui nurga tipp asub koordinaatide alguspunktis ja alghaar ühtib x-telje positiivse suunaga, siis on vaja teada, millises veerandis asub nurga lõpphaar. Selle kindlakstegemiseks tuleb esitada nurk kujus $\alpha+360°\cdot n$, kus $n\in\mathbf{Z}$. Nurk $\alpha+360°\cdot n$ on sama veerandi nurk, mis nurk α.

N ä i t e d. $3285°=45°+9\cdot360°$, sest $3285:360=9$, jääk 45. Nurga lõpphaar on esimeses veerandis.
$-8436°=-56°-23\cdot360°$, sest $8436:360=23$, jääk 56. Tulemuse võib esitada ka kujus $-56°+360°-23\cdot360°=304°-24\cdot360°$. Nurga lõpphaar on neljandas veerandis.

7.15. TAANDAMISVALEMID.

Taandamisvalemeiks nimetatakse seoseid 90°-st suuremate nurkade ja esimese veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide vahel. (vt. joon. 7.54.) $\overset{\frown}{BOA_1}=180°-\alpha$, $\overset{\frown}{BOA_2}=180°+\alpha$, $\overset{\frown}{BOA_3}=360°-\alpha$.



Joon. 7.54

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$,
$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$,
$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$, $\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$,
$\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$, $\cot(180°+\alpha)=\cot\alpha$,

$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$,
$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$,
$\tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha$,
$\cot(360°-\alpha)=-\cot\alpha$,

Näited.

1) $\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$;

2) $\tan 135°=\tan(180°-45°)=-\tan 45°=-1$;

3) $\cos 330°=\cos(360°-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.16. ÜHE JA SAMA NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSTE VAHELISED SEOSED.

1. Ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub ühega.

$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$ ehk $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2. Nurga tangens võrdub sama nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

3. Nurga kootangens võrdub sama nurga koosinuse ja siinuse jagatisega.

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4. Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi korrutis võrdub ühega.

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

5. $\frac{1}{(\cos\alpha)^2}=1+(\tan\alpha)^2$ ehk $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$.

6. $\frac{1}{(\sin\alpha)^2}=1+(\cot\alpha)^2$ ehk $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha$.

Toodud seosed võimaldavad nurga antud funktsiooni väärtuse järgi arvutada sama nurga teiste funktsioonide väärtusi.

Näited.

1) $\cos\alpha=0{,}8$. Arvuta $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$.

$\sin\alpha=\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-0{,}8^2}=\sqrt{1-0{,}64}=$
$=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\tan\alpha=\frac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$.

2) $\tan\alpha=3$ Arvuta $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.

$\frac{1}{(\cos\alpha)^2}=1+(\tan\alpha)^2$; $\frac{1}{(\cos\alpha)^2}=1+3^2=10\Rightarrow(\cos\alpha)^2=$
$=\frac{1}{10}=0{,}1\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{0{,}1}=0{,}316$;

$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$; $\sin\alpha=3\cdot0{,}316=0{,}948$.

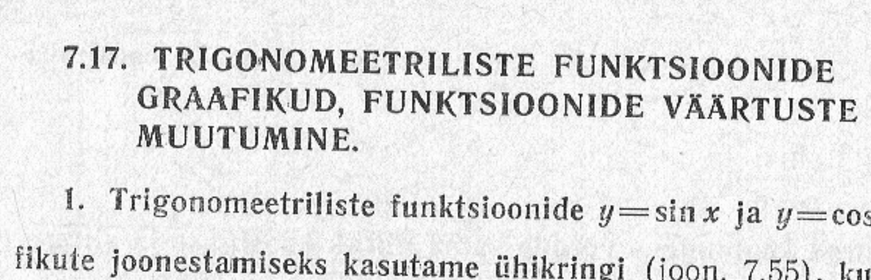
7.17. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD, FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSTE MUUTUMINE.

1. **Trigonomeetriliste funktsioonide $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ graafikute joonestamiseks kasutame ühikringi** (joon. 7.55), **kus $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ ja $|\overrightarrow{OA}|=1$.**

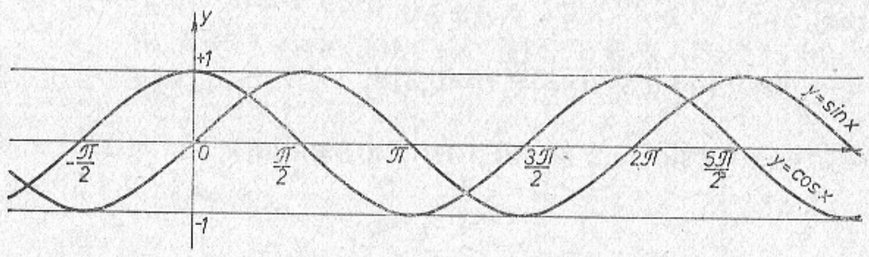
Jaotame ühikringi 12 võrdseks osaks (igale osale vastab 30°), siin $\sin 0°=0$ $\sin 30°=A_1B_1$; $\sin 60°=A_2B_2$; $\sin 90°=1$; $\sin 120°=A_4B_4$ jne.
$\cos 0°=1$; $\cos 30°OB_1$; $\cos 60°=OB_2$; $\cos 90°=0$; $\cos 120°=OB_4$ jne.

Graafikute joonestamiseks valime x-teljel ühiku nii, et 90°-le vastav lõik on võrdne y-telje ühikuga.

x-telje paralleelide punktidest A_1; A_2; A_3 jne. kanname argumendi väärtusele 0°, 30°, 60° jne. vastavad funktsiooni väärtused ($y=\sin x$ korral 0; A_1B_1; A_2B_2; jne. $y=\cos x$ korral $OA_0=1$; $OB_1=A_2B_2$; $OB_2=A_1B_1$ jne.). Ühendame saadud punktid sujuvalt. Saadud graafikut nimetatakse **sinusoidiks.**



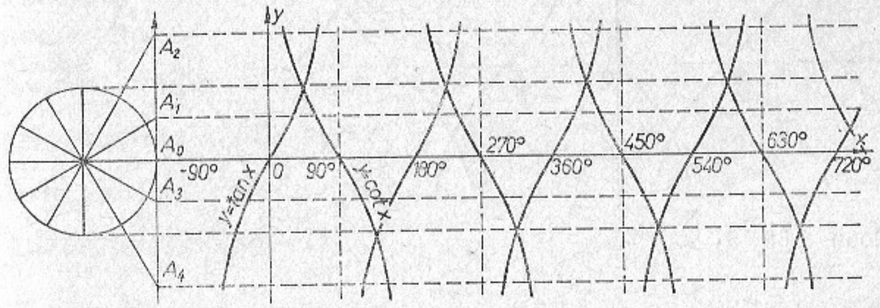
Joon. 7.55



Joon. 7.56

Funktsiooni $y=\cos x$ graafik on funktsiooni $y=\sin x$ graafiku lükkeks vektoriga $\vec{V}=(-90°;\ 0)$ (joon. 7.55). Kasutatud ühiku valikul saame moonutatud sinusoidi. Õige joonise saamiseks peab 180°-le vastama ligikaudu 3,14 ühikut (joon. 7.56).

2. **Trigonomeetriliste funktsioonide $y=\tan x$ ja $y=\cot x$ graafikute joonestamiseks kasutame ühikringi, kus $OA_0=1$** (joon. 7.57).



Joon. 7.57

Tangensteljeks nimetatakse ühikringi puutujat punktis koordinaatidega (1; 0). Nurga lõpphaara ja tangenstelje lõikepunkti ordinaadid esitavad sel juhul mis tahes nurga tangensi väärtusi (abstsissi väärtus on võrdne 1-ga). II ja III veerandi nurkade korral lõikab tangenstelge nurga lõpphaara pikendus üle nullpunkti.

$\tan 0°=0$; $\tan 30°=A_0A_1$; $\tan 60°=A_0A_2$; $\tan 90°$ ei oma väärtust (funktsiooni graafik katkeb); $\tan 120°=A_0A_3$ jne.

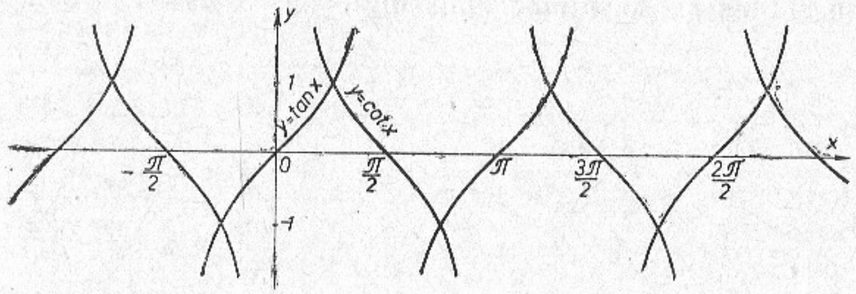
$\cot 0°$ ei oma väärtust; $\cot 30°=\tan 60°=A_0A_2$; $\cot 60°=\tan 30°=A_0A_1$ jne.

$$\tan 120°=\frac{A_0A_3}{OA_0}=A_0A_3 \quad \text{jne.}$$

Graafikute joonestamisel valime x-teljel ühiku nii, et 90°-le vastav lõik on võrdne y-telje ühikuga. Tangenstelje punktidest A_1, A_2 jne. joonestame paralleelid x-teljega. Nendele kanname argumendi väärtustele 0°, 30°, 60° jne. vastavad funktsioonide väärtused ($y=\tan x$ korral 0; A_0A_1; A_0A_2 jne., $y=\cot x$ korral

A_0A_2; A_0A_1 jne.) Ühendame saadud punktid sujuvalt. Saadud graafikut nimetatakse **tangensoidiks.**

Kasutatud ühiku valikul saame moonutatud tangensoidi. Õige joonise saamiseks peab 180°-le vastama ligikaudu 3,14 ühikut (joon. 7.58).



Joon. 7.58

3. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste muutumine nurga kasvamisel 0°-st 360°-ni.

Nurga trigonomeetrilise funktsiooni nimetus	Nurga muutumine			
	$0° \to 90°$	$90° \to 180°$	$180° \to 270°$	$270° \to 360°$
$\sin \alpha$	kasvab $0 \to 1$	kahaneb $1 \to 0$	kahaneb $0 \to -1$	kasvab $-1 \to 0$
$\cos \alpha$	kahaneb $1 \to 0$	kahaneb $0 \to -1$	kasvab $-1 \to 0$	kasvab $0 \to 1$
$\tan \alpha$	kasvab $0 \to \infty$	kasvab $-\infty \to 0$	kasvab $0 \to \infty$	kasvab $-\infty \to 0$
$\cot \alpha$	kahaneb $\infty \to 0$	kahaneb $0 \to -\infty$	kahaneb $\infty \to 0$	kahaneb $0 \to -\infty$

7.18. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE RAKENDUSI.

Täisnurkse kolmnurga elementide all mõistame tema külgi ja nurki. Kui muutuvatest elementidest, s. o. külgedest a, b, c ja teravnurkadest α ning β (joon. 7.48) mingid kaks elementi on antud (nende hulgas vähemalt üks külg), siis on kolmnurk määratud ja tema teisi elemente saab arvutada.

Et arvutada täisnurkse kolmnurga teisi külgi ja nurki, peab olema antud kas

1) **teravnurk ja hüpotenuus** või
2) **teravnurk ja kaatet** või
3) **kaks kaatetit** või
4) **kaatet ja hüpotenuus.**

Näited.

1. Antud $\alpha = 38°30'$; $c = 8{,}6$ cm.

   Leiame β; a; b (joon. 7.48)

   $\beta = 90° - \alpha$; $\beta = 90° - 38°30' = 51°30'$.

   $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $a = c \cdot \sin \alpha$; $a = 8{,}6 \cdot \sin 51°30' \approx 6{,}7$ cm.

   $\sin \beta = \frac{b}{c}$; $b = c \cdot \sin \beta$; $b = 8{,}6 \cdot \sin 38°30' \approx 5{,}4$ cm.

2. Antud $\alpha = 54°20'$; $b = 24{,}5$ cm.

   Leiame β, a, c (joon. 7.48).

   $\beta = 90° - \alpha$; $\beta = 90° - 54°20' = 35°40'$.

   $\tan \alpha = \frac{a}{b}$; $a = b \cdot \tan \alpha$; $a = 24{,}5 \cdot \tan 54°20' \approx 34{,}2$ cm.

   $\sin \beta = \frac{b}{c}$; $c = \frac{b}{\sin \beta}$; $c = \frac{24{,}5}{\sin 35°40'} \approx 42{,}0$ cm.

3. Antud $a = 4{,}65$ cm; $b = 6{,}28$ cm.

   Leiame α, β, c (joon. 7.48).

   $\tan \alpha = \frac{a}{b}$; $\tan \alpha = \frac{4{,}65}{6{,}28} \approx 0{,}741$; $\alpha = 36°35' \approx 36°40'$.

$\beta = 90° - 36°40' = 53°20'$.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $c = \frac{4{,}65}{\sin 36°35'} \approx 7{,}80$ cm.

4. Antud $a = 7{,}8$ cm; $c = 12{,}4$ cm.

Leiame α, β, b (joon. 7.48).

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{7{,}8}{12{,}4} \approx 0{,}629$; $\alpha \approx 39°$.

$\beta = 90° - 39° = 51°$.

$\sin\beta = \frac{b}{c}$; $b = c \cdot \sin\beta$; $b = 12{,}4 \cdot \sin 51° \approx 9{,}6$ cm.

5. Võrdhaarse kolmnurga alus on $a = 6{,}4$ cm ja tipunurk 46°. Leida kolmnurga ümbermõõt ja pindala (joon. 7.59).

$AB = 6{,}4$ cm;

$\widehat{ACB} = 46°$;

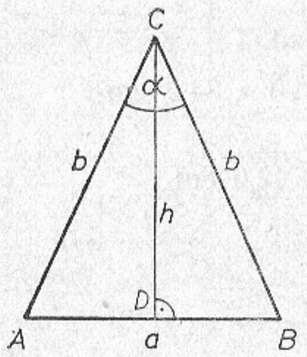
$AD = DB = 6{,}4 : 2 = 3{,}2$ cm.

$\widehat{ACD} = \widehat{DCB} = 46° : 2 = 23°$.

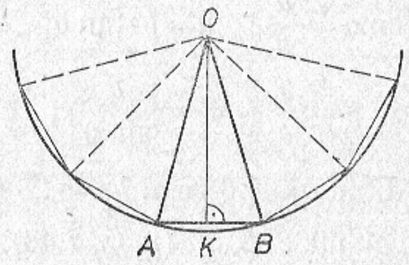
Täisnurksest kolmnurgast ADC leiame kolmnurga haara b ja kõrguse h.

$\sin 23° = \frac{3{,}2}{b}$; $b = \frac{3{,}2}{\sin 23°} \approx 8{,}19$ cm.

$\tan 23° = \frac{3{,}2}{h}$; $h = \frac{3{,}2}{\tan 23°} \approx 7{,}54$ cm.



Joon. 7.59



Joon. 7.60

$U = 6{,}4 + 2 \cdot 8{,}19 \approx 23$ cm;

$S = \frac{6{,}4 \cdot 7{,}54}{2} \approx 24$ cm².

Vastus. Kolmnurga ümbermõõt on 23 cm, pindala 24 cm².

6. Korrapärase kaksteistnurga külg on 2,4 m.
Arvuta kaksteistnurga ümberringjoone raadius ja pindala (joon. 7.60).

$AB = 2{,}4$ m;

$\widehat{AOB} = \frac{360°}{12} = 30°$;

$AK = KB = 1{,}2$ m.

$\widehat{AOK} = \widehat{KOB} = 15°$.

Täisnurksest kolmnurgast AOK leiame ümberringjoone raadiuse ja apoteemi.

$\sin 15° = \frac{1{,}2}{AO}$; $AO = \frac{1{,}2}{\sin 15°} \approx 4{,}6$.

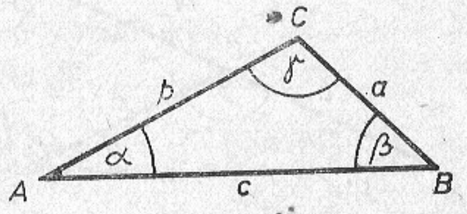
$\tan 15° = \frac{1{,}2}{OK}$; $OK = \frac{1{,}2}{\tan 15°} \approx 4{,}48$.

$S = 12 \cdot \frac{2{,}4 \cdot 4{,}48}{2} \approx 65$ m².

7.19. KALDNURKSETE KOLMNURKADE LAHENDAMINE.

Siinusteoreem. Kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega. (joon. 7.61.)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Joon. 7.61

Koosinusteoreem. Kolmnurga ühe külje ruut on võrdne ülejäänud külgede ruutude summaga, millest on lahutatud samade külgede ja nendevahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$,
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$,
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Kolmnurga puuduvate elementide leidmiseks kasutatakse siinusteoreemi, kui kolmnurgas on antud

1) üks külg ja kaks nurka,
2) kaks külge ja nendest ühe vastasnurk.

Kolmnurga puuduvate elementide leidmiseks kasutatakse koosinusteoreemi koos siinusteoreemiga, kui kolmnurgas on antud

1) kaks külge ja nendevaheline nurk,
2) kolm külge.

Näited. 1) Leia kolmnurga puuduvad elemendid ja pindala, kui $a=3{,}6$ cm, $\beta=46°20'$ ja $\gamma=68°40'$

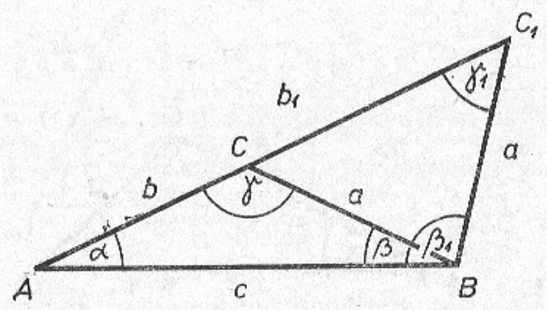
Lahendus. $\alpha=180°-(46°20'+68°40')=65°$.

$\frac{3{,}6}{\sin 65°}=\frac{b}{\sin 46°20'}=\frac{c}{\sin 68°40'}$. Siit

$b=\frac{3{,}6\cdot\sin 46°20'}{\sin 65°}\approx 2{,}9$, $c=\frac{3{,}6\cdot\sin 68°40'}{\sin 65°}\approx 3{,}7$.

$S=\frac{3{,}6\cdot 2{,}87\sin 68°40'}{2}\approx 4{,}8$.

Vastus. $\alpha=65°$, $b\approx 2{,}9$ cm, $c\approx 3{,}7$ cm, $S\approx 4{,}8$ cm².



Joon. 7.62

2) Leia kolmnurga puuduvad elemendid ja pindala, kui $a=4{,}8$ cm, $c=5{,}6$ cm ja $\alpha=32°30'$. (joon. 7.62.)

$\frac{4{,}8}{\sin 32°30'}=\frac{5{,}6}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}$.

a) $\gamma_1\approx 38°50'\approx 39°$, $\beta_1\approx 108°40'\approx 109°$, $b_1\approx 8{,}45\approx 8{,}5$,

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 5{,}6\cdot\sin 108°40'\approx 12{,}7\approx 13$.

b) $\gamma_2\approx 141°$, $\beta_2\approx 6°20'$, $b_2\approx 0{,}98$, $S_2\approx 1{,}5$.

Vastus. a) $\gamma_1\approx 39°$, $\beta_1\approx 109°$, $b_1\approx 8{,}5$ cm, $S_1\approx 13$ cm².
b) $\gamma_2\approx 141°$, $\beta_2\approx 6°20'$, $b_2\approx 0{,}98$ cm, $S\approx 1{,}5$ cm².

Kui kolmnurgas on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk, siis on ülesandel ainult üks lahend.

3) Leia kolmnurga puuduvad elemendid ja pindala, kui $a=7{,}5$ cm, $b=8{,}2$ cm ja $\gamma=148°30'$. (joon. 7.61.)

$c^2=7{,}5^2+8{,}2^2-2\cdot 7{,}5\cdot 8{,}2\cdot\cos 148°30'\approx$
$\approx 123{,}7-123\cdot(-\cos 31°30')=123{,}7+123\cdot\sin 58°30'\approx$
$\approx 123{,}7+105=228{,}7\cdot c=\sqrt{228{,}7}\approx 15$.

$\frac{7{,}5}{\sin\alpha}=\frac{8{,}2}{\sin\beta}=\frac{15}{\sin 148°30'}=\frac{15}{\sin 31°30'}$.

$\sin\alpha=\frac{7{,}5\sin 31°30'}{15}$. $\alpha\approx 15°10'$.

$\sin\beta=\frac{8{,}2\sin 31°30'}{15}$. $\beta\approx 16°30'$.

$S=\frac{1}{2}\cdot 7{,}5\cdot 8{,}2\cdot\sin 148°30'\approx 16$.

Vastus. $c\approx 15$ cm, $\alpha\approx 15°10'$, $\beta\approx 16°30'$, $S\approx 16$ cm².

4) Leia kolmnurga puuduvad elemendid ja pindala, kui $a=4{,}8$ cm, $b=5{,}4$ cm, $c=6{,}2$ cm. (joon. 7.61.)

Lahendus: $4{,}8^2=5{,}4^2+6{,}2^2-2\cdot 5{,}4\cdot 6{,}2\cdot\cos\alpha$,
siit $\cos\alpha\approx 0{,}668$ ja $\alpha\approx 48°$.

$\frac{4{,}8}{\sin 48°}=\frac{5{,}4}{\sin\beta}=\frac{6{,}2}{\sin\gamma}$; siit $\beta\approx 57°$ ja $\gamma\approx 74°$.

$S=\frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 5{,}4\cdot \sin 74^\circ \approx 12.$

Vastus: $\alpha\approx 48^\circ$, $\beta\approx 57^\circ$, $\gamma\approx 74^\circ$, $S\approx 12$ cm².

Märkusi: Kolmnurga lahendamisel kolme külje järgi on soovitatav alustada väikseima nurga leidmisest, siis leida suuruselt järgmine nurk ning suurim nurk leida 180°-st kahe väiksema nurga summa lahutamisega.

2) Pea meeles, et kolmnurgas on suurima külje vastas suurim nurk ja kasuta seda tulemuse õigsuse hindamisel.

8. VEKTORID.

8.1. VEKTORI MÕISTE.

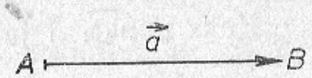
Matemaatikas, füüsikas jm. kasutatakse kahesuguseid suurusi. Ühtesid neist iseloomustab mingi kindel arvuline väärtus (näiteks pikkus, pindala, ruumala, mass jne.). Neid suurusi nimetatakse skalaarseteks suurusteks ehk **skalaarideks**. Teisi aga iseloomustab peale arvulise väärtuse ka suund (näiteks lüke, jõud, kiirus jne.). Selliseid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks suurusteks ehk **vektoriteks.**

Vektorit saab kujutada suunatud lõigu abil. Lühiduse mõttes nimetame edaspidi vektorit kujutavat suunatud lõiku ennast samuti vektoriks.

Vektori otspunktid on järjestatud (joon. 8.1.)

A — vektori algus- ehk rakenduspunkt;
B — vektori lõpp-punkt.

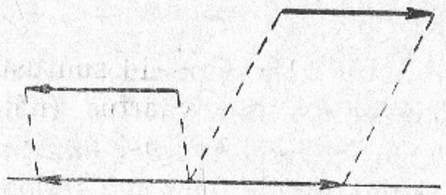
Vektorit tähistatakse kas üheainsa väikese tähega või kahe suure tähega, mille kohal on nool. Joonisel 8.1. kujutatud vektorit võib tähistada kas $\vec{a}$ või $\overrightarrow{AB}$.

Joon. 8.1 

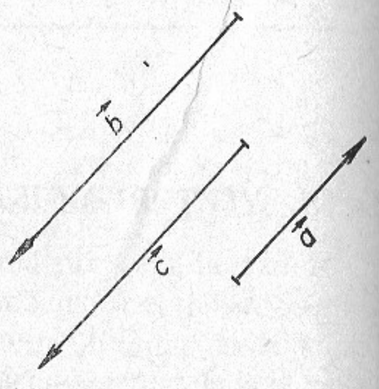
Vektori pikkuseks nimetatakse seda vektorit kujutava suunatud lõigu pikkust. Vektorite $\vec{a}$ ja $\overrightarrow{AB}$ pikkust märgitakse vastavalt $|\vec{a}|$ ja $|\overrightarrow{AB}|$.

Vektoril on teda kandva (tema poolt määratud) sirge siht.

Samasihilisteks nimetatakse vektoreid, mille rakendamisel ühisesse alguspunkti saame vektorid, mis on ühel sirgel (joon.



Joon. 8.2



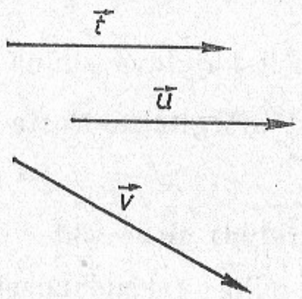
Joon. 8.3

8.2.) Samasihilisus tähendab niisiis paralleelsust. Lause $\vec{t} \| \vec{u}$ tähendab, et vektorid $\vec{t}$ ja $\vec{u}$ on paralleelsed (ehk samasihilised).

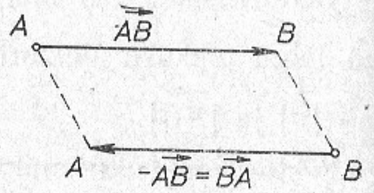
Paralleelsed vektorid on kas samasuunalised (sümbol $\uparrow\uparrow$) või vastassuunalised (sümbol $\uparrow\downarrow$). Näiteks joonisel 8.3. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ ja $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$. Kui vektorid ei ole paralleelsed (sümbol $\nparallel$), siis neid suuna poolest võrrelda ei saa.

Samasuunalised ja võrdse pikkusega vektorid on võrdsed. Joonisel 8.4. vektorid $\vec{t}$ ja $\vec{u}$ on võrdsed, kuid nad ei ole võrdsed vektoriga $\vec{v}$.

Kaks punkti A ja B määravad kaks vektorit ($\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BA}$).



Joon. 8.4



Joon. 8.5

Võrdse pikkusega vastassuunalisi vektoreid nimetatakse teineteise vastandvektoriteks. Vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse $-\vec{a}$, vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektorit tähistatakse kas $-\overrightarrow{AB}$ või $\overrightarrow{BA}$ joon. 8.5.).

Vastandvektorite summat kujutatava vektori algus- ja lõpp-punkt ühtivad. Sellist vektorit nimetatakse nullvektoriks ja tähistatakse sümboliga $\vec{0}$. Nullvektor on vastandvektorite summa: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Nullvektori liitmine mis tahes vektoriga ei muuda seda vektorit, s. t. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Nullvektori pikkus on võrdne nulliga, st. $|\vec{0}|=0$. Nullvektor loetakse paralleelseks iga vektoriga.

8.2. VEKTORITE SUMMA JA VAHE.

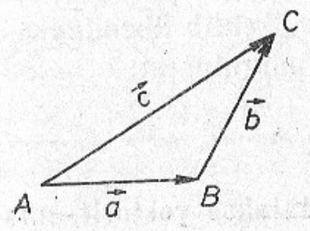
Vektorite summa leidmiseks on mitmeid võimalusi.

Kolmnurgareegel.

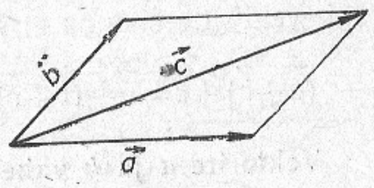
Kahe vektori liitmiseks rakendatakse esimene liidetav vabalt valitud punkti ja teine liidetav esimese lõpp-punkti. Nende vektorite summa on siis vektor, mis viib esimese liidetava alguspunkti teise liidetava lõpp-punkti (joon. 8.6).

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Kolmnurgareegli abil saab liita nii paralleelseid kui ka mitteparalleelseid vektoreid.



Joon. 8.6



Joon. 8.7

Rööpkülikureegel.

Kahe mitteparalleelse vektori liitmiseks rakendatakse need vektorid ühisesse alguspunkti ja ehitatakse nendele rööpkülik. Vektorite summa määrab siis rööpküliku diagonaal, mis lähtub ühisest alguspunktist (joon. 8.7).

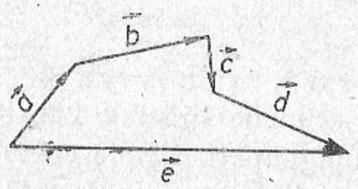
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Hulknurgareegel.

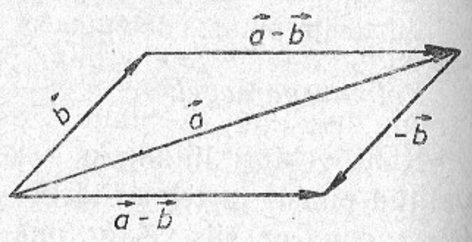
Vektorite liitmise kolmnurgareegli järjestikune rakendamine võimaldab liita ka rohkem kui kaht vektorit.

Vektorite liitmiseks rakendatakse üks liidetav vabalt valitud punkti ja iga järgnev liidetav eelneva lõpp-punkti. Summaks on siis vektor, mis viib esimese liidetava alguspunkti viimase liidetava lõpp-punkti (joon. 8.8).

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{e}$.



Joon. 8.8



Joon. 8.9

Vektorite liitmine on kommutatiivne (kehtib vahetuvusseadus), s. t. vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Vektorite liitmine on assotsiatiivne (kehtib ühenduvusseadus), s. t. vektorite summa ei sõltu sulgude paigutusest:

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheks $\vec{a}-\vec{b}$ nimetatakse vektorit, mis rahuldab võrrandit $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahe leidmiseks rakendatakse need vektorid ühisesse alguspunkti. Vaheks $\vec{a}-\vec{b}$ on siis vektor, mis viib vektori $\vec{b}$ lõpp-punkti vektori a lõpp-punkti.

Vektorist $\vec{a}$ vektori $\vec{b}$ lahutamiseks tuleb vektoriga $\vec{a}$ liita vektori $\vec{b}$ vastandvektor $-\vec{b}$:

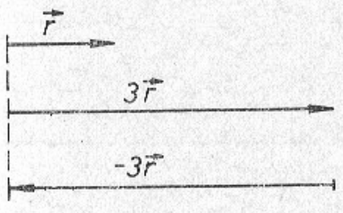
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (joon. 8.9).

8.3. ARVU JA VEKTORI KORRUTIS.

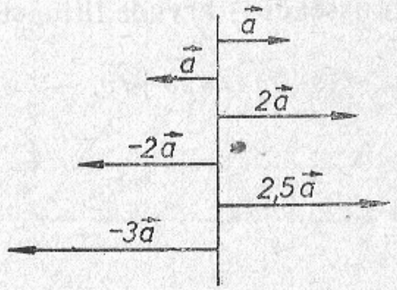
Vektori $\vec{v}$ korrutiseks arvuga r nimetatakse vektorit, mis on

1) **kollineaarne vektoriga $\vec{v}$,**
2) **samasuunaline vektoriga $\vec{v}$, kui r on positiivne arv ($r>0$) ja vastassuunaline vektoriga $\vec{v}$, kui r on negatiivne arv ($r<0$),**
3) **pikkuselt võrdne arvu r absoluutväärtuse ja vektori $\vec{v}$ pikkuse korrutisega.**

Arvu r ja vektori $\vec{v}$ korrutist tähistatakse $r\vec{v}$ (joon. 8.10). Järelikult arvu r ja vektori $\vec{v}$ korrutis $r\vec{v}$ on vektor, mis rahuldab tingimusi



Joon. 8.10



Joon. 8.11

1) $r\vec{v} \parallel \vec{v}$,

2) $r\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{v}$, kui $r>0$ ja

$r\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{v}$, kui $r<0$,

3) $|r\vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$.

Näide.

Esitame joonisel 9.11 järgmised vektorid:

$\vec{a}$; $-1\vec{a} = -\vec{a}$; $2\vec{a}$; $-2\vec{a}$; $2{,}5\vec{a}$; $-3\vec{a}$.

Arvu ja vektori korrutamine on assotsiatiivne (kehtib ühenduvusseadus) arvteguri suhtes:

$r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$.

Näide.

$2 \cdot (3{,}5\vec{v}) = (2 \cdot 3{,}5)\vec{v} = 7\vec{v}$.

Arvu ja vektori korrutamine on distributiivne (kehtib jaotusvusseadus) vektorite liitmise suhtes:

$r(\vec{u}+\vec{v}) = r\vec{u}+r\vec{v}$.

Näide.

$5 \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = 5\vec{u}+5\vec{v}$.

Arvu ja vektori korrutamine on distributiivne (kehtib jaotusvusseadus) arvude liitmise suhtes:

$(s+r)\vec{v} = s\vec{v}+r\vec{v}$.

8.4. VEKTORI KOORDINAADID.

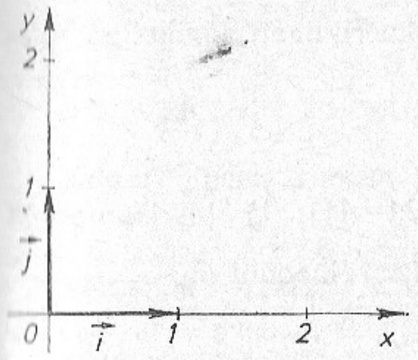
Vektorit, mille pikkus võrdub ühikuga, nimetatakse ühikvektoriks. Koordinaattelgede suunalisi ühikvektoreid tähistame vastavalt sümbolitega $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ (joon. 8.12).

Rakendame koordinaatide nullpunkti vabalt mingi vektori $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (joon. 8.13). Rööpküliku reegli järgi leiame, et $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Kuna vektor $\overrightarrow{OA}$ avaldub ühikvektori $\vec{i}$ kaudu $\overrightarrow{OA} = u_1\vec{i}$ ja vektor $\overrightarrow{OB}$ ühikvektori $\vec{j}$ kaudu $\overrightarrow{OB} = u_2\vec{j}$, siis vektor $\vec{u}$ avaldub ühikvektorite $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ kaudu: $\vec{u} = u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$. Arve u_1 ja u_2 nimetatakse vektori u koordinaatideks antud koordinaatide süsteemis ja kirjutatakse, et $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Joonisel 8.13 on $u_1 = 1{,}5$ ja $u_2 = 2$ ning seega võime kirjutada, et $u = 1{,}5\vec{i}+2\vec{j}$ ehk $\vec{u} = (1{,}5; 2)$. Arv u_1 on vektori $\vec{u}$ esimene ja u_2 teine koordinaat.

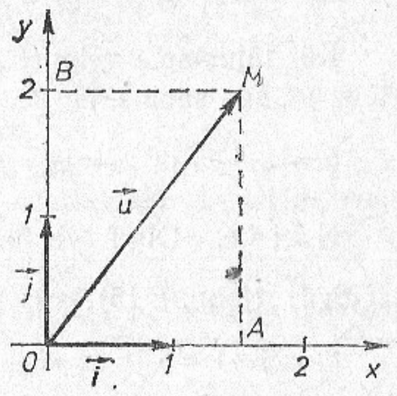
Koordinaatide nullpunkti rakendatud vektori koordinaadid ühtivad vektori lõpp-punkti vastavate koordinaatidega. Vektorit $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ nimetatakse punkti M (joon. 8.13) kohavektoriks. Punkti kohavektori koordinaatideks on selle punkti koordinaadid.

Nullvektori mõlemad koordinaadid on nullid.

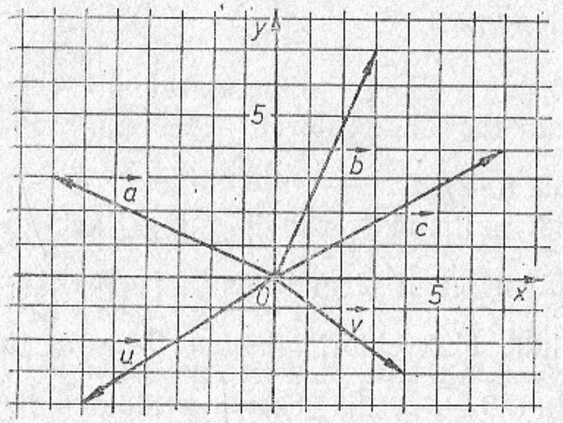
Vastandvektorite vastavad koordinaadid on teineteise vastandarvud.



Joon. 8.12



Joon. 8.13



Joon. 8.14

N ä i d e. Avaldame kohavektorid joonisel 8.14 esiteks ühikvektorite ning seejärel koordinaatide abil.

$\vec{a}=-7\vec{i}+3\vec{j}=(-7;\,3)$ $\qquad$ $\vec{u}=-6\vec{i}-4\vec{j}=(-6;\,-4)$

$\vec{b}=3\vec{i}+7\vec{j}=(3;\,7)$ $\qquad$ $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}=(4;\,-3)$

$\vec{c}=7\vec{i}+4\vec{j}=(7;\,4)$

Kui vektori alguspunkt on $A(x_1;\,y_1)$ ja lõpp-punkt $B(x_2;\,y_2)$, siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaatideks on selle vektori lõpp- ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahed.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\cdot y_2-y_1).$$

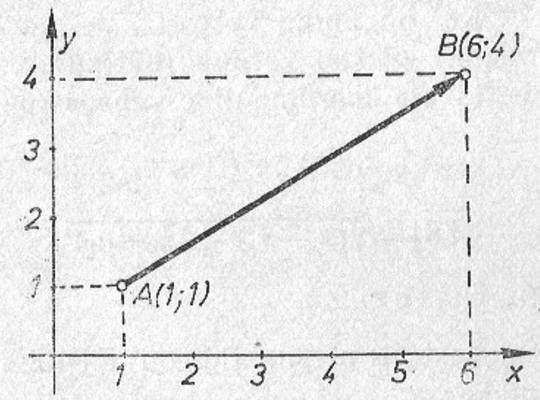
Kui tähistame vektori $\overrightarrow{AB}$ esimest koordinaati sümboliga v_1 ja teist v_2, siis saame, et

$$v_1=x_2-x_1 \text{ ja } v_2=y_2-y_1$$

N ä i d e. Olgu vektori alguspunkt $A(1;\,1)$ ja lõpp-punkt $B(6;\,4)$ (joon. 8.15), siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid on

$v_1=6-1=5$ ja $v_2=4-1=3$

Seega $\overrightarrow{AB}=(5;\,3)$



Joon. 8.15

N ä i d e 2. Olgu antud vektori alguspunkt $A(6;\,-5)$ ning vektori enda koordinaadid $\overrightarrow{AB}=(-4;\,3)$, siis vektori lõpp-punkti B koordinaadid on

$x_2=x_1+v_1=6-4=2$ ja
$y_2=y_1+v_2=-5+3=-2$

Seega vektori lõpp-punkt on $B(2;\,-2)$.

N ä i d e 3. Olgu antud vektori lõpp-punkt $B(7;\,-3)$ ning vektor $\overrightarrow{AB}=(10;\,-1)$, siis vektori alguspunkti koordinaadid on

$x_1=x_2-v_1=7-10=-3$ ja
$y_1=y_2-v_2=-3-(-1)=-2.$

Seega vektori alguspunktid on $A(-3;\,-2)$.

8.5. VEKTORI PIKKUS.

Vektori pikkus võrdub ruutjuurega vektori koordinaatide ruutude summast:

Tähistades vektori $\vec{v}$ koordinaadid v_1 ja v_2, saame vektori pikkuse arvutamise eeskirja

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

Kui on antud vektori lõpp- ja alguspunkti koordinaadid, siis **vektori pikkus võrdub ruutjuurega vektori lõpp- ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahede ruutude summast.**

Kui $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Näide.

Vektori otspunktid on $A(-2; 1)$ ja $B(3; 14)$. Leia vektori pikkus.

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{[3-(-2)]^2+(14-1)^2} = \sqrt{(3+2)^2+13^2} =$$
$$= \sqrt{25+169} = \sqrt{194} \approx 13{,}9.$$

Vektorit, mille pikkus on 1, nimetatakse ühikvektoriks.

8.6. TEHTED KOORDINAATIDES ESITATUD VEKTORITEGA.

Vektorite summa koordinaatideks on liidetavate vektorite vastavate koordinaatide summad.

Vektorite summa koordinaadid leiame järgmiselt:

Kui $\vec{u} = (u_1; u_2)$ ja $\vec{v} = (v_1; v_2)$, siis $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1; u_2+v_2)$

Vektorite vahe koordinaatideks on vektorite vastavate koordinaatide vahed.

Kui $\vec{u} = (u_1-u_2)$; ja $\vec{v} = (v_1; v_2)$, siis $\vec{u}-\vec{v} = (u_1-v_1; u_2-v_2)$.

Arvu ja vektori korrutise koordinaatideks on arvu ja vektori koordinaatide korrutised.

$$r\vec{v} = (rv_1; rv_2).$$

Vektorite kollineaarsuse tunnus.

Kaks vektorit on kollineaarsed siis ja ainult siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_r}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Näited.

1. On antud vektorid $\vec{u} = (4; 6)$ ja $\vec{v} = (3; -2)$.

   Leida $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ ja $-2\vec{v}$.

   $\vec{u}+\vec{v} = (7; 4)$; $\quad \frac{1}{2}\vec{u} = (2; 3)$;

   $\vec{u}-\vec{v} = (1; 8)$; $\quad -2\vec{v} = (-6; 4)$.

2. On antud punktid $A(3; -2)$; $B(-5; 4)$; $C(2; 2)$ ja $D(6; 4)$.

   Arvutame $\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ pikkuse.

   1) $\overrightarrow{AB} = (-5-3; 4+2) = (-8; 6)$;

   2) $\overrightarrow{CD} = (6-2; 4-2) = (4; 2)$;

   3) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = (-8+4; 6+2) = (-4; 8)$;

   4) $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2+8^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9$.

8.7. VEKTORI AVALDAMINE KAHE MITTEPARALLEELSE VEKTORI KAUDU.

Selgitame seda näidete abiga.

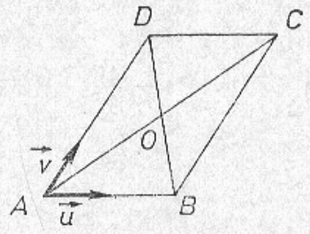
Näide 1. Nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, milles $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ ja $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ (joon. 8.16). Avaldame vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kaudu

1) vektori $\overrightarrow{AC}$; 2) vektori $\overrightarrow{AO}$; 3) vektori $\overrightarrow{DB}$ ja 4) vektori $\overrightarrow{CB}$.

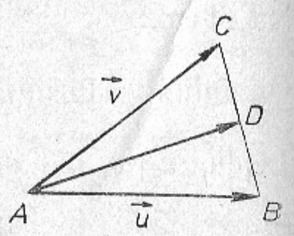
1. Jooniselt näeme, et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. Asendame $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ ja $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$. Saame $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}+3\vec{v}$.

2. Rööpküliku diagonaalide omaduse tõttu $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\overrightarrow{AC}$. Et aga $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}+3\vec{v}$, siis $\overrightarrow{AO} = 0{,}5(2\vec{u}+3\vec{v}) = \vec{u}+1{,}5\vec{v}$.

3. Vastavalt vektorite lahutamise eeskirjale saame, et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Asendame ja $\overrightarrow{DB} = 2\vec{u}-3\vec{v}$.



Joon. 8.16



Joon. 8.17

4. Andmete kohaselt $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}$, siis $\overrightarrow{CB}=-3\vec{v}$ ehk $\overrightarrow{CB}=-3\vec{v}+0\vec{u}$.

Näide 2. Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on D (joon. 8.17). Avaldame vektori $\overrightarrow{AD}$ vektorite $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ ja $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ kaudu.

Ülesande andmete kohaselt $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$. Jooniselt aga näeme, et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{v}-\vec{u}$ ja $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\vec{u}$. Asendame esimesse võrdsusse ja saame, et $\vec{v}-\vec{u}=2(\overrightarrow{AD}-\vec{u})$. Sellest avaldame

$\overrightarrow{AD}=0{,}5\vec{u}+0{,}5\vec{v}$.

Üldiselt, kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on kaks mitteparalleelset vektorit tasandil, siis iga vektor $\vec{s}$ sel tasandil on avaldatav vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kaudu: $\vec{s}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

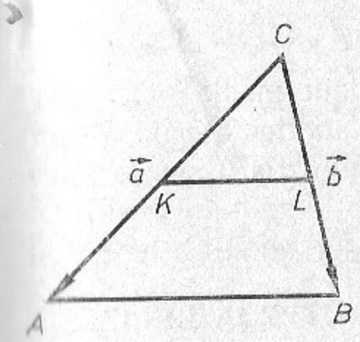
Arvud x ja y on seejuures üheselt määratud.

8.8. VEKTORITE KASUTAMISE NÄITEID TÕESTAMISEL.

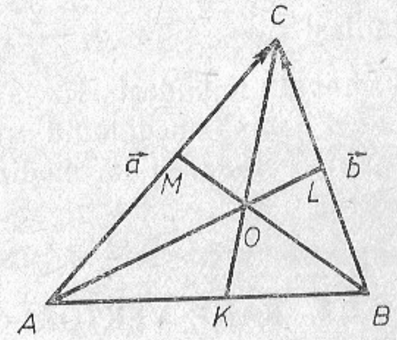
1) Kolmnurga kesklõik on alusega paralleelne ja pool sellest.

Eeldus: $AK=KC$ ja $BL=LC$.

Väide: $KL=\frac{1}{2}AB$ ja $KL\parallel AB$.



Joon. 8.18



Joon. 8.19

Tõestus: Tähistame $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, siis $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}$. $\overrightarrow{KL}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b})$. Järelikult $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Seega on kesklõik pool alusest ja paralleelne sellega.

2) Kolmnurga mediaanid jaotuvad lõikumisel suhtes 2:1 tipust alates.

Eeldus: $AM=MC$, $AK=KB$, $BL=LC$.

Väide: $AO:OL=BO:OM=CO:OK=2:1$.

Tõestus: Tähistame $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, siis $\overrightarrow{AL}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ ja $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Lõikugu AL ja KC punktis 0, siis $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=x\cdot\overrightarrow{AL}+y\cdot\overrightarrow{KC}$.

$$\vec{a}=x\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=x\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}x\vec{b}+\frac{1}{2}y\vec{a}+$$

$$+\frac{1}{2}y\vec{b}=\left(x+\frac{1}{2}y\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\right)\vec{b}.$$

Vektorite võrdsusest järeldame, et

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ y-x=0 \end{cases}.$$

Teisest võrrandist saame, et $y=x$. Asendades esimesse, saame $2x+x=2$, ehk $3x=2$,

millest $x=\frac{2}{3}$ ja $y=\frac{2}{3}$. Kui aga lõigud AO ja OC on $\frac{2}{3}$ vastavalt lõikudest AL ja KC, siis järelikult mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes 2:1 tipust arvates. Analoogiliselt saab tõestada, et ka mediaan BM jaotub punktis 0 samas vahekorras.

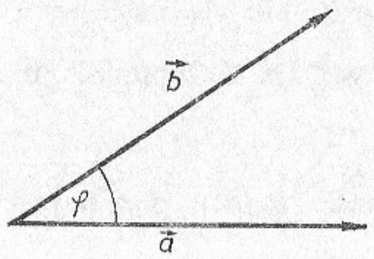
8.9. KAHE VEKTORI SKALAARKORRUTIS JA SELLE OMADUSI.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **skalaarkorrutiseks** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ nimetatakse nende vektorite pikkuste $|\vec{a}|$ ja $|\vec{b}|$ ning vektorite vahelise nurga koosinuse korrutist (joon. 9.20).

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\mu=ab\cos\mu$, kus $|\vec{a}|=a$ ja $|\vec{b}|=b$.

Näide. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=8$ ja nurk vektorite $\vec{a}$ ning $\vec{b}$ vahel on 120°. Leia skalaarkorrutis $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\mu=6\cdot8\cdot\cos120°=48\cdot\cos(180°-60°)=$
$=-48\cos60°=-48\cdot1/2=-24.$



Joon. 8.20

Järeldusi: Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on samasuunalised, siis $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab$, sest $\cos0°=1$.

2. Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on vastassuunalised, siis $\vec{a}\cdot\vec{b}=-ab$, sest $\cos180°=-1$.
3. Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristuvad, siis $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, sest $\cos90°=0$.

4. Vektori $\vec{a}$ skalaarruut $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ võrdub vektori pikkuse ruuduga. $|\vec{a}|^2=a^2$.

Omadusi: 1. Vektorite skalaarkorrutis on kommutatiivne. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. Vektorite skalaarkorrutis on assotsiatiivne skalaariga (arvuga) korrutamise suhtes. $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(k\vec{b})$.
3. Vektorite skalaarkorrutis on distributiivne vektorite summa suhtes. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

9. TASANDILISED KUJUNDID, NENDE OMADUSED JA SEOSED.

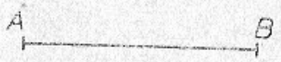
9.1. LÕIK. KIIR. SIRGE. TASAND.

9.1.1. LÕIK. LÕIKUDE VÕRDLEMINE.

Punkte tähistatakse suurte tähtedega: A, B, C, ... Loetakse: *punkt A*.

Lõiguks *AB* nimetatakse punktihulka, mis koosneb punktidest *A* ja *B* ning kõigist punktidest, mis asuvad punktide *A* ja *B* vahel.

Lõiku AB kui punktihulka tähistatakse nii: $[AB]$ (joon. 9.1). A ja B on lõigu AB otspunktid. Punkte, mis asetsevad punktide A ja B vahel, nimetatakse lõigu AB sisepunktideks. Iga kaks punkti määravad ühe ja ainult ühe lõigu. Lõigu pikkust tähistatakse kas AB, $|AB|$ või ühetäheliselt a.



Joon. 9.1

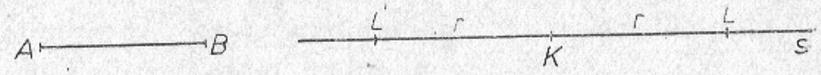
Kui ei ole oluline, kas räägime lõigust kui geomeetrilisest kujundist või lõigu pikkusest, siis ütleme lõik AB või lõik a. Lõike võime võrrelda nende pikkuse järgi. Mistahes kahe lõigu $[AB]$ ja $[CD]$ kohta kehtib üks järgmistest seostest:

$|AB|<|CD|$ ehk lihtsamalt $AB<CD$ või
$|AB|=|CD|$ ehk lihtsamalt $AB=CD$ või
$|AB|>|CD|$ ehk lihtsamalt $AB>CD$.

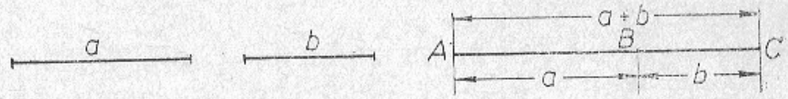
9.1.2. LÕIKUDE SUMMA JA VAHE.

Ülesanne 1.

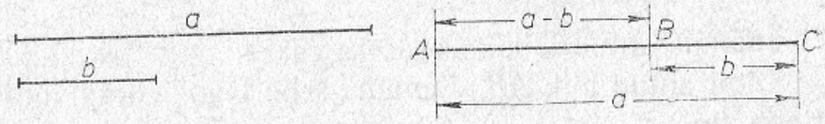
Antud lõigu kandmine antud sirgele (joon. 9.2). Antud: lõik AB. Kanda lõik AB sirgele s, lähtudes punktist K. Võtame sirklisse lõigu AB ja asetame sirkli teraviku punkti K. Tõmbame raa-



Joon. 9.2



Joon. 9.3



Joon. 9.4

diusega $r=AB$ ringjoone, mis lõikab sirget s punktides L' ja L. Ülesandel on kaks lahendit, sest $KL=KL'=AB$.

Ülesanne 2.

Antud: a; b. Leida: $a+b$ (joon. 9.3).

Ülesanne 3.

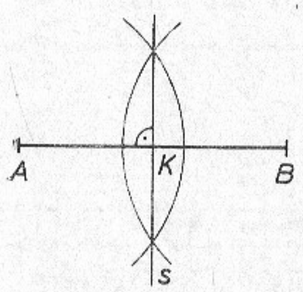
Antud: a; b. Leida: $a-b$ (joon. 9.4).

9.1.3. LÕIGU JAOTAMINE OSADEKS.

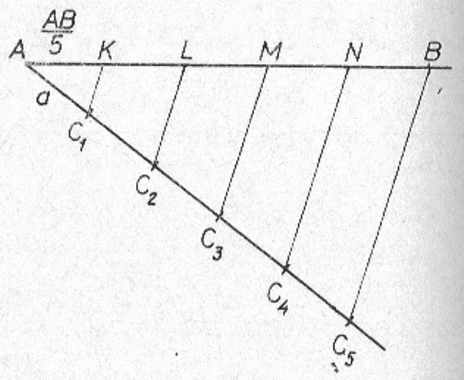
Ülesanne 1.

Poolitada antud lõik (joon. 9.5).

Joonestame kaared lõigu otspunktidest A ja B nii, et raadius $r>\frac{AB}{2}$. Läbi kaarte lõikepunktide joonestame sirge s. Sirge s poolitab lõigu AB punktis K; ühtlasi on sirge s punktide A ja B sümmeetriateljeks.



Joon. 9.5



Joon. 9.6

Ülesanne 2.

Jaotada antud lõik n võrdseks osaks.

Olgu antud lõik AB. Jaotame selle lõigu viieks võrdseks osaks (joon. 9.6.).

Joonestame abikiire läbi punkti A ja kanname sellele sirkli abil vabalt valitud pikkusega lõigu a viis korda. Tähistame kantud lõikude lõpp-punktid vastavalt tähtedega C_1, C_2, C_3, C_4 ja C_5. Ühendame punkti C_5 antud lõigu otspunktiga B. Joonestame läbi punktide C_1, C_2, C_3 ja C_4 paralleelsed sirged (jaot. 9.3.2.) sirgega BC_5 kuni lõikumiseni lõiguga AB. Saame antud lõigu jaotuspunktid K, L, M ja N. Et $AK=KL=LM=MN=BN$, siis ongi antud lõik jaotatud 5 võrdseks osaks.

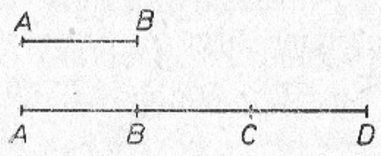
Seda võtet saame kasutada lõigu jaotamisel mis tahes arvuks võrdseteks osadeks.

9.1.4. LÕIGU KORRUTAMINE ARVUGA.

Ülesanne.

Korrutada antud lõik AB arvuga n.

Olgu antud lõik AB. Leiame näiteks lõigu $3 \cdot AB$ (joon. 9.7).



Joon. 9.7

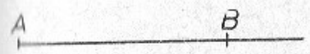
Joonestame kiire ja kanname sellele antud lõiku alates alguspunktist kolm korda. Saame punktid B, C ja D. Et $AB=BC=CD$, siis lõik $AD=3 \cdot AB$.

9.1.5. KIIR. SIRGE. TASAND.

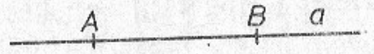
Kiir on punktihulk, mis tekib lõigu pikendamisel üle ühe otspunkti.

Kui lõiku AB pikendame üle otspunkti B, siis punkti A nimetatakse kiire AB alguspunktiks.

Kiirt kui punktihulka, mille alguspunkt on A ja mingi teine punkt B, tähistatakse nii: $[AB)$ (joon. 9.8).



Joon. 9.8



Joon. 9.9

Sirge on punktihulk, mis tekib lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti.

Sirget kui punktihulka, mis tekib lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti tähistatakse nii: (AB). Sirget võib tähistada ka ühe tähega, näiteks sirge a (joon. 9.9).

Lõiku, kiirt ja sirget kujutleme punktihulgana.

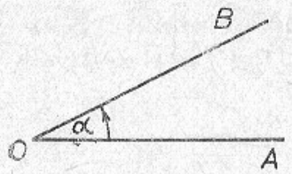
Igat punktihulka nimetatakse geomeetriliseks kujundiks.

Punkte, lõike, kiiri, sirgeid ja muid kujundeid kujutleme asetsevana tasasel pinnal ehk tasandil, mis igas suunas ulatub kui tahes kaugele.

9.2. NURK.

9.2.1. NURGA MÕISTE.

Joonestame kaks kiirt OA ja OB, millel on ühine alguspunkt O (joon. 9.10). Selline kahest kiirest koosnev kujund jaotab tasandi ülejäänud punktide hulga kaheks osaks. Kumbagi saadud tasandi osa koos kiirtega OA ja OB nimetatakse *nurgaks*.



Joon. 9.10

Vaadeldavat nurka neist kahest märgitakse kaarega või kaarnoolega nurga sees (joon. 9.10).

Kiiri OA ja OB nimetatakse *nurga haaradeks* ja kiirte ühist alguspunkti O *nurga tipuks*. Haarade vahel olev tasandi osa on *nurga sisepiirkond*.

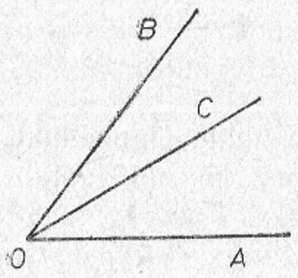
Nurka AOB kui geomeetrilist kujundit, mille moodustavad kiired OA ja OB, tähistatakse kas $\angle O$ (loe: *nurk O*) või $\angle AOB$ (nurga tipu tähis on keskel; loe: *nurk AOB*) või α (loe: *nurk* α; α on kreeka tähestiku väiketäht).

9.2.2. NURKADE VÕRDLEMINE.

Joonestame nurga AOB tipust kiire OC (joon. 9.11). See kiir jaotab nurga AOB kaheks nurgaks, millest üks on $\angle AOC$ ja teine $\angle COB$. Need mõlemad on väiksemad nurgast AOB, sest nad on viimase osahulgad:

$\angle AOC \subset \angle AOB$ ja $\angle COB \subset \angle AOB$.
Niisiis $\angle AOC < \angle AOB$ ja $\angle COB < \angle AOB$.

Kahe nurga võrdlemiseks tuleb üks nurk paigutada teise peale nii, et nende tipud ja ühed haarad ühtivad ning siis vaadata, kuhu langeb pealepaigutatud nurga teine haar. Võib esineda kolm võimalust:



Joon. 9.11

1) teine haar langeb nurga sisse;
2) teine haar langeb väljapoole nurka;
3) teine haar langeb all oleva nurga teise haara peale.

Vastavalt sellele saame kindlaks määrata, kumb nurkadest on väiksem, kumb suurem või on nad võrdsed.

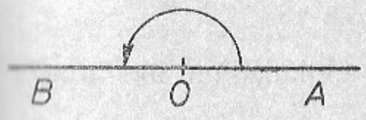
Kui nurki saab ühitada, siis nimetatakse neid nurki kongruentseteks nurkadeks.

9.2.3. NURKADE LIIGID.

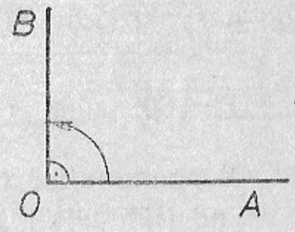
Sirgnurgaks nimetatakse nurka, mille haarad moodustavad sirgjoone. $\angle AOB$ on sirgnurk (joon. 9.12).

Täisnurk on pool sirgnurgast.
$\angle AOB$ on täisnurk. Täisnurka tähistab punkt nurka märkiva kaare sees (joon. 9.13).

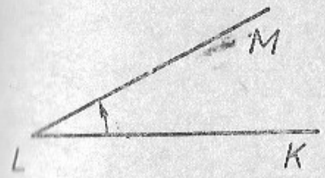
Teravnurgaks nimetatakse nurka, mis on täisnurgast väiksem. $\angle KLM$ on teravnurk (joon. 9.14).



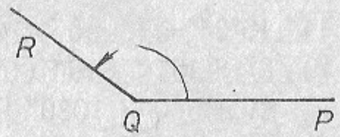
Joon. 9.12



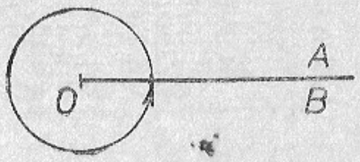
Joon. 9.13



Joon. 9.14



Joon. 9.15



Joon. 9.16

Nürinurgaks nimetatakse nurka, mis on täisnurgast suurem, kuid sirgnurgast väiksem. $\angle PQR$ on nürinurk (joon. 9.15).

Täispööre koosneb kahest sirgnurgast. $\angle AOB$ on täispööre (joon. 9.16).

Nurga mõõtühikuks on võetud niisugune kesknurk (jaot. 9.10.2.), **mis toetub kaarele suurusega 1 kaarekraad** (jaot. 9.10.2.). Nurga kraadi tähistatakse 1°. Juhul kui tahame avaldada nurga AOB suurust, siis kirjutame $\widehat{AOB}$.

Näiteks nurga AOB kui geomeetrilise kujundi suuruse kirjutame nii: $\widehat{AOB}=35°$ (loe: *nurga AOB suurus on* 35 *kraadi*).

Täisnurga suurus on 90°. Joonisel 10.13 $\widehat{AOB}=90°$.

Sirgnurga suurus on 180°. Joonisel 10.12 $\widehat{AOB}=180°$.

Täispööre on 360°. Joonisel 9.16 $\widehat{AOB}=360°$.

Nurga mõõtmiseks kasutatakse ka nurgakraadist väiksemat mõõtühikut, mille nimi on *nurgaminut*. Üks nurgaminut (lühidalt 1′) on nurgakraadist 60 korda väiksem:

$$1°=60' \quad \text{ehk} \quad 1'=\frac{1°}{60}.$$

Nurgaminutist 60 korda väiksemaks ühikuks on üks **nurgasekund** (lühidalt 1″).

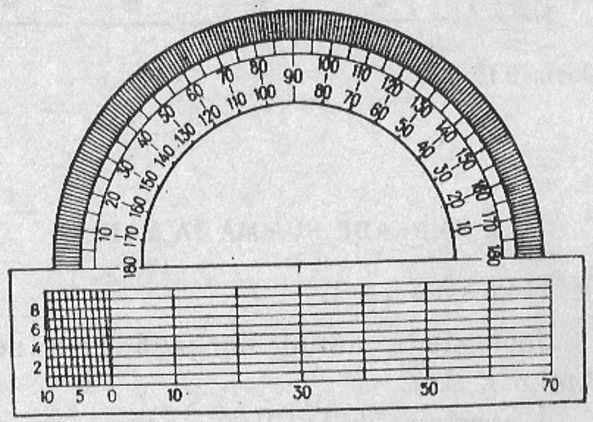
$$1''=\frac{1'}{60}=\frac{1°}{3600}.$$

Näiteid ühikute teisendamise kohta:

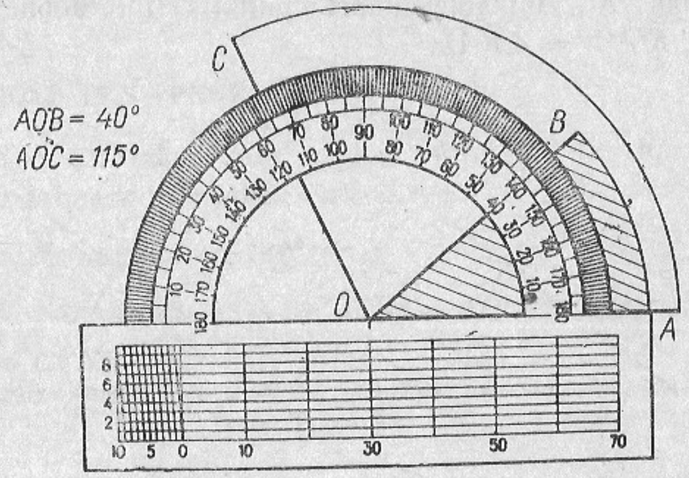
1) $15°24'=15\cdot 60'+24'=900'+24'=924'$;
2) $8°18'40''=8\cdot 60\cdot 60''+18\cdot 60''+40''=$
$=28800''+1080''+40''=29920''$;
3) $1524'=25°24'$, sest $1524:60=25$, jääk 24.
4) $32458''=540'58''=9°58''$, sest $32458:60=540$, jääk 58, $540:60=9$.

9.2.4. NURGA SUURUSE MÕÕTMINE MALLI ABIL.

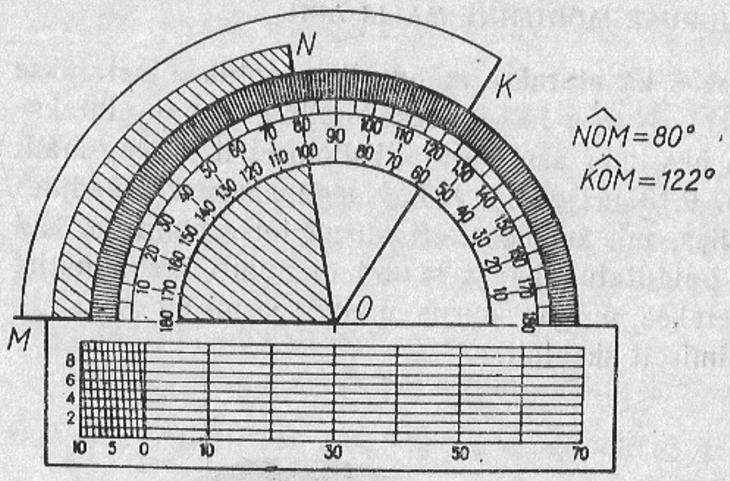
Nurga mõõtmiseks kasutatakse mõõduriista, mida nimetatakse malliks. (joon. 9.17). Nurga mõõtmiseks malli abil paigutatakse mall nii, et nurga üks haar asetseb malli diameetril ja tipp malli keskpunktis (joon. 9.18 ja joon. 9.19). Nurga suurust kraadides märgib skaala kriips, mis on kohakuti nurga teise haaraga. Kui malli diameetrile paigutatud haara suund on malli keskpunktist paremale, siis loetakse nurga suurus malli seesmiselt skaalalt, vastasel juhul välimiselt skaalalt.



Joon. 9.17



Joon. 9.18



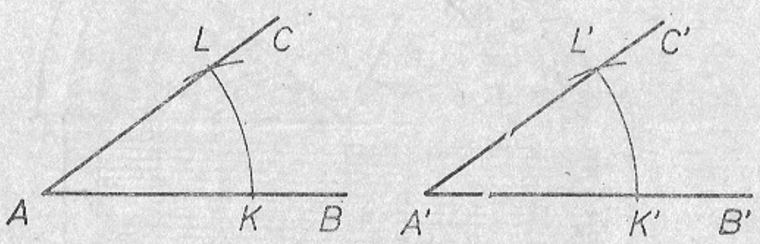
Joon. 9.19

9.2.5. NURKADE SUMMA JA VAHE.

Ülesanne 1.

Joonestada antud nurgaga kongruentne nurk (joon. 9.20). Antud $\angle BAC$.

Joonestame kiire $A'B'$. Joonestame suvalise raadiusega kaare KL, mille keskpunktiks on A, ja sama raadiusega kaare, mille keskpunktiks on A' ning mis lõikab kiirt $A'B'$ punktis K'. Nüüd võtame sirklisse lõigu KL ja sama raadiusega, võttes keskpunktiks K', lõikame kaart punktis L'. Joonestame kiire $A'L'$. $\angle K'A'L'=\angle KAL$.

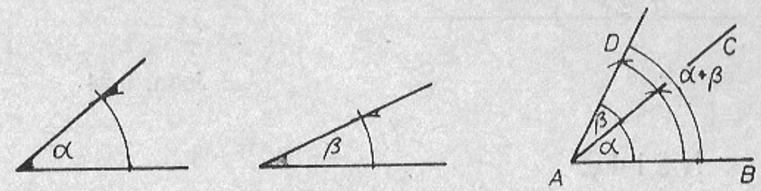


Joon. 9.20

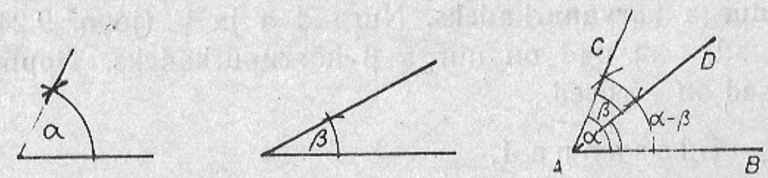
Ülesanne 2.

Leida nurkade α ja β summa sirkli ja joonlaua abil (joon. 9.21).

Antud nurgad α ja β. Leida α+β.



Joon. 9.21



Joon. 9.22

Ülesanne 3.

Leida nurkade α ja β vahe sirkli ja joonlaua abil (joon. 9.22).

Antud nurgad α ja β. Leida α—β.

9.2.6. KÕRVUNURGAD JA TIPPNURGAD.

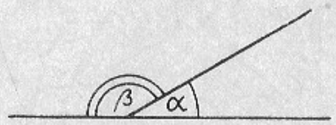
Kõrvunurkadeks nimetatakse kaht nurka, millel on üks haar ühine ja mille teised haarad moodustavad sirge.

Kõrvunurkade suuruste summa on 180°.

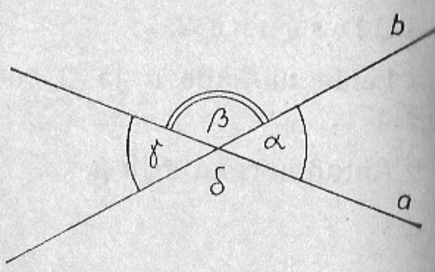
Joonisel 9.23 on kõrvunurgad α ja β; α+β=180°. Samuti on kõrvunurgad β ja γ; β+γ=180°.

Kui on antud üks kahest kõrvunurgast, siis saame arvutada teise (joon. 9.23).

α=180°—β ja β=180°—α.



Joon. 9.23



Joon. 9.24

Näide.

α ja β on kõrvunurgad. $\alpha=123°$. Leiame β.
$\beta=180°-\alpha$; $\beta=180°-123°=57°$.

Tippnurkadeks nimetatakse kaht nurka, mis on ühe ja sama nurga kõrvunurkadeks. Nurgad α ja γ (joon. 9.24) on tippnurgad, sest nad on nurga β kõrvunurkadeks. Tippnurkade suurused on võrdsed.

Ülesanne 1.

Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest ühe suurus on 45°. Leida teised nurgad.

Lahendus. Antud nurgaga $\alpha=45°$ on võrdne tema tippnurk γ, seega $\gamma=45°$. Kuna kõrvunurkade omaduse tõttu $\alpha+\beta=180°$, siis $\beta=180°-\alpha=180°-45°=135°$, siis ka nurga β tippnurk $\delta=135°$.

Vastus. Nurgad on 45°, 135°, 45°, 135°.

Ülesanne 2.

Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on üks teisest 50° võrra suurem. Leida tekkinud nurgad.

Lahendus. Tähistame väiksema nurga suuruse x-ga, siis suurem nurk on $x+50°$. Kuna kõrvunurkade suuruste summa on 180°, saame võrrandi

$$x+x+50°=180°;\ 2x=180°-50°=130°;\ x=65°.$$

Suurem nurk on $65°+50°=115°$.

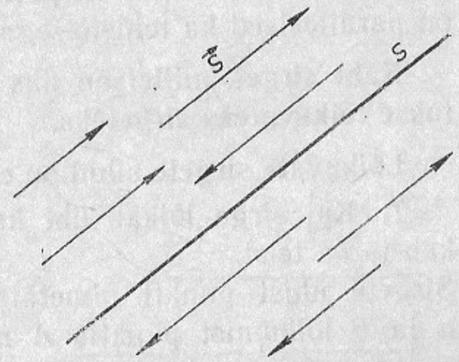
Vastus. Tekkinud nurgad on suurustega 65° ja 115°.

9.3. SIRGED TASANDIL.

9.3.1. SIRGE.

Sirgeks s, mis läbib punkti A vektori $\vec{s}$ sihis, nimetatakse kõigi selliste punktide X hulka, mille puhul vektor $\overrightarrow{AX}$ avaldub vektori $\vec{s}$ kaudu. Lühidalt kirjutame selle nii:

$$s=\{X\,|\,\overrightarrow{AX}=x\vec{s}\}.$$



Joon. 9.25

Vektorit, mis määrab sirge sihi, nimetatakse *sirge sihivektoriks*. Kui $\vec{s}$ on sirge s sihivektor, siis võib sirge s sihivektoriks võtta ka iga vektor, mis on kollineaarne vektoriga $\vec{s}$ (joon. 9.25). Mingist punktist antud sirgel saab liikuda kahes erinevas suunas.

9.3.2. SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS.

Järeldused sirge definitsioonist.

1. Antud punkti läbib antud sihis üks ja ainult üks sirge. Punkt ja sihivektor määravad sirge üheselt.
2. Kaht erinevat punkti läbib üks ja ainult üks sirge. Punkte A ja B läbib sirge $AB=\{X\,|\,\overrightarrow{AX}=x\overrightarrow{AB}\}$.

Sellest tuleneb, et kahe erineva sirge ühisosa kas on tühi või koosneb ühest punktist.

Kui sirgete ühisosas on rohkem kui üks ühine punkt, siis sirged ühtivad.

Kaht sirget, millel saab võtta ühise sihivektori, nimetatakse samasihilisteks ehk paralleelseteks sirgeteks.

Sirgete a ja b paralleelsust tähistatakse $a \parallel b$.

3. Iga sirge on paralleelne iseendaga.

4. Kahe erineva paralleelse sirge ühisosa on tühi.
Kui sirged a ja b on paralleelsed, siis $a \cap b = \emptyset$.

5. Iga punkti läbib üks ja ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.
Kui joonisel 9.26 $v \parallel t$ ehk $v \cap t = \emptyset$, siis $v \nparallel s$ ehk $v \cap s \neq \emptyset$.

6. Kui kaks sirget on paralleelsed kolmanda sirgega, siis nad on paralleelsed ka teineteisega.

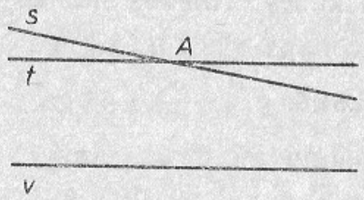
Kaht sirget, millel on üks ja ainult üks ühine punkt, nimetatakse lõikuvateks sirgeteks.

Lõikuvate sirgete sihid on erinevad.

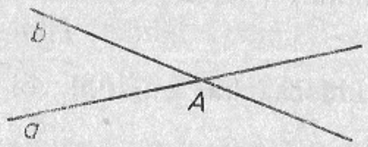
7. Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist.
Sirgete ühist punkti nimetatakse *sirgete lõikepunktiks*. Sirgete a ja b lõikumist punktis A märgitakse $a \cap b = \{A\}$ (joon. 9.27).

Iga kaks sirget tasandil kas lõikuvad või on paralleelsed (joon. 9.26).

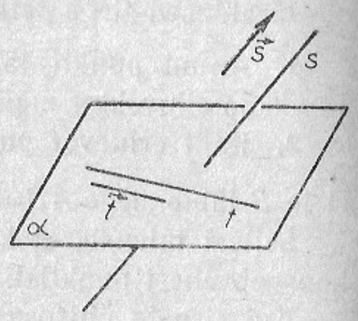
Kui kaks sirget ei ole ühel tasandil, siis nad ei ole paralleelsed ega lõiku (joon. 9.28).



Joon. 9.26



Joon. 9.27

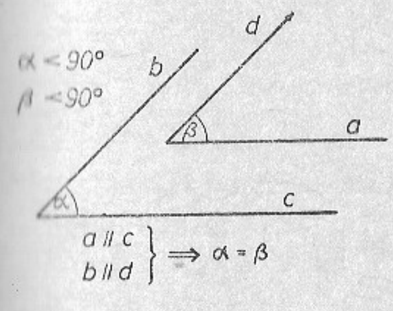


Joon. 9.28

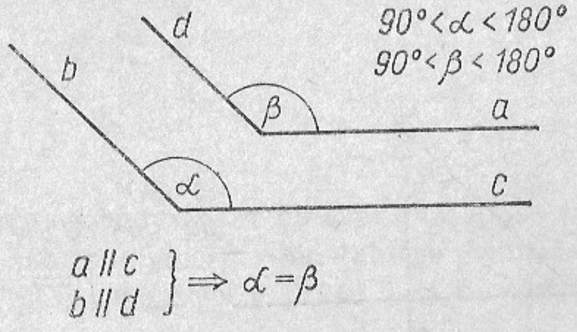
9.3.3. VASTAVALT PARALLEELSETE JA RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

Kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka on võrdsed, kui haarad on sama- või vastassuunalised; nende nurkade summa on sirgnurk, kui kaks haara on sama- ja kaks vastassuunalised (joon. 9.29, 9.30 ja 9.31).

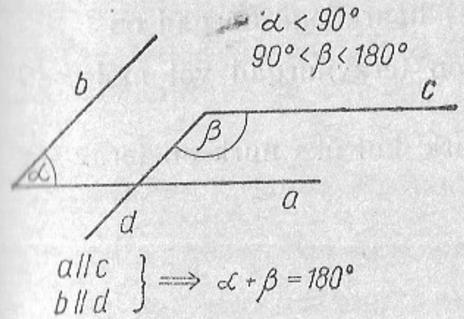
Järeldus: **Kui nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed või nende summa on sirgnurk** (joon. 9.32, 9.33 ja 9.34).



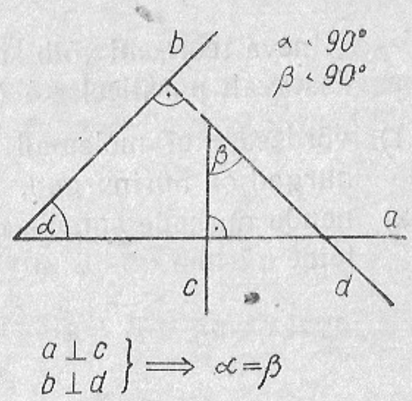
Joon. 9.29



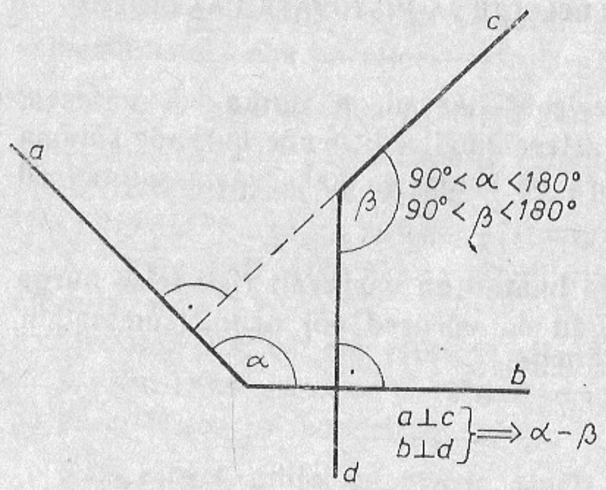
Joon. 9.30



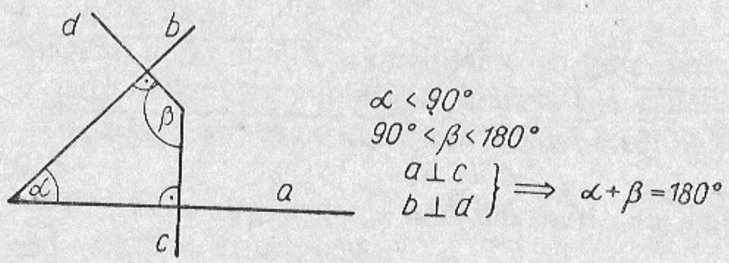
Joon. 9.31



Joon. 9.32



Joon. 9.33



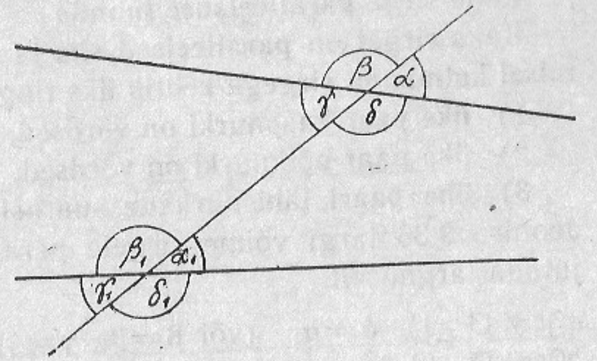
Joon. 9.34

Eelneva teoreemi võib sõnastada ka teisiti.
Vastavalt paralleelsete (ristuvate) haaradega nurgad on

1) võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad,
2) nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks nurk on terav- ja teine nürinurk.

9.3.4. NURGAD, MIS TEKIVAD KAHE SIRGE LÕIKAMISEL SIRGEGA.

Lõigates kahte sirget mingi kolmanda sirgega moodustame kaheksa nurka, mida vaadeldakse paariviisi (joon. 9.35). Mõnele sellisele paarile on antud erinimetused.



Joon. 9.35

1. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on samasuunalised, nimetatakse *kaasnurkadeks*. Kaasnurgad on α ja α_1, β ja β_1, γ ja γ_1, δ ja δ_1 (joon. 9.35).

2. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastassuunalised, nimetatakse *lähisnurkadeks*. Lähisnurgad on δ ja α_1, γ ja β_1 (joon. 9.35). (Välised lähisnurgad on α ja δ_1, β ja γ_1.)

3. Kaht nurka, mille sisepiirkonnad on teine teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal on vastassuunalised, nimetatakse *põiknurkadeks*. Põiknurgad on α_1 ja γ, β_1 ja δ (joon. 9.35). (Välised põiknurgad on α ja γ_1, β ja δ_1.)

9.3.5. KAHE SIRGE PARALLEELSUSE TUNNUSED.

Teoreem. **Kui kaht paralleelset sirget lõigata sirgega, siis**

1) **iga kaks kaasnurka on võrdsed,**
2) **iga kaks põiknurka on võrdsed,**
3) **iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk.**

Pöördteoreem. Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega kehtib üks tingimustest

1) üks paar kaasnurki on võrdsed,
2) üks paar põiknurki on võrdsed,
3) ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk,

siis need kaks sirget on paralleelsed.

Kahe sirge paralleelsuse tunnus

Kaks sirget on paralleelsed siis ja ainult siis, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega kehtib üks tingimustest

1) üks paar kaasnurki on võrdsed,
2) üks paar põiknurki on võrdsed,
3) ühe paari lähisnurkade suuruste summa on sirgnurk.

Joonise 9.36 järgi võime sirgete paralleelsuse tunnuse üles kirjutada järgmiselt.

$a \cap c \neq \emptyset$ 1) $\alpha = \alpha_1$ (või $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$) $\Rightarrow a \parallel b$;
$b \cap c \neq \emptyset$ 2) $\gamma = \alpha_1$ (või $\delta = \beta_1$, $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \delta_1$) $\Rightarrow a \parallel b$;
3) $\delta + \alpha_1 = 180°$ (või $\gamma + \beta_1 = 180°$,
$\alpha + \delta_1 = 180°$, $\beta + \gamma_1 = 180°$) $\Rightarrow a \parallel b$.

Ülesanne. Kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga tekkinud nurkadest üks on 60°. Leiame teised nurgad.

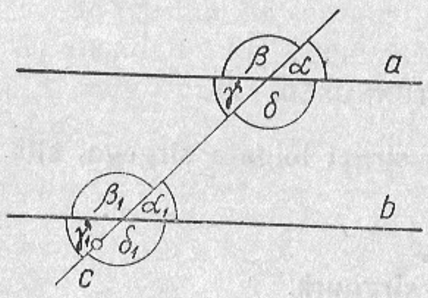
Lahendus. Olgu $\alpha = 60°$ (joon. 9.36); siis antud teoreemi ja tippnurkade omadust kasutades saame, et

$\gamma = \alpha_1 = \gamma_1 = 60°$; $\alpha + \beta = 180°$; $\delta = 180° - 60° = 120°$,

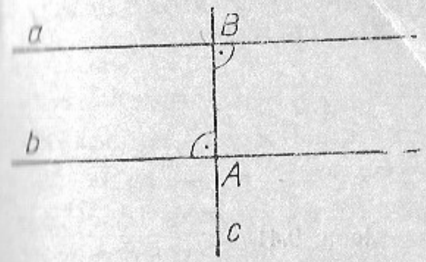
järelikult ka $\beta = \delta_1 = \beta_1 = \delta = 120°$.

Kaks sirget, mis on risti kolmanda sirgega, on teineteisega paralleelsed:

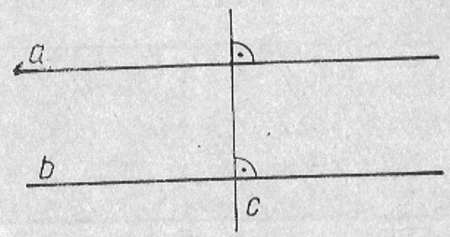
$a \perp c$, $b \perp c \Rightarrow a \parallel b$ (joon. 9.37).



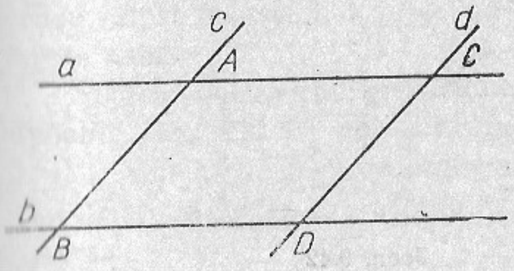
Joon. 9.36



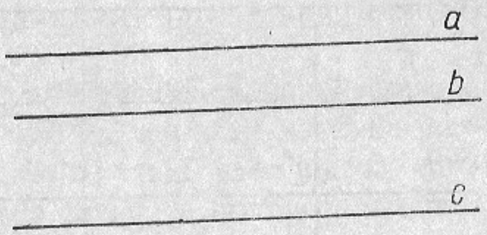
Joon. 9.37



Joon. 9.38



Joon. 9.39



Joon. 9.40

Kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega:

$a \parallel b$, $c \perp a \Rightarrow c \perp b$ (joon. 9.38).

Paralleelsete sirgete vahelised paralleelsete sirgete lõigud on võrdsed:

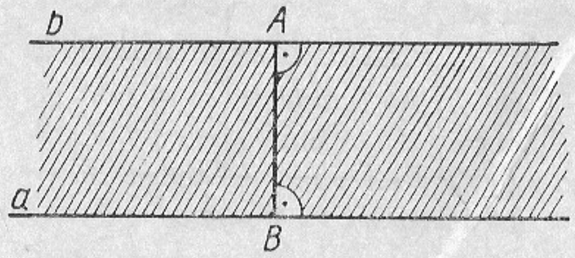
$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ c \parallel d \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = CD$ (joon. 9.39).

$\left.\begin{matrix} a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ (joon. 9.40).

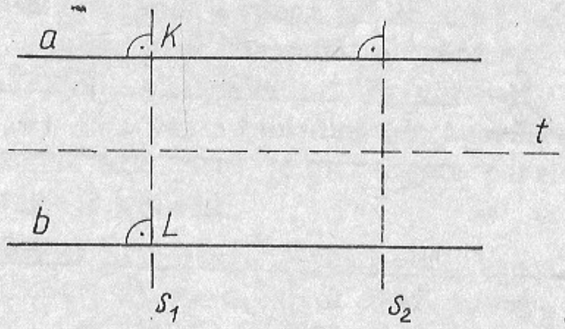
9.3.6. RIBA.

Ribaks nimetatakse punktihulka, mis koosneb kahe paralleelse sirge punktidest ja nende sirgete vahel asetsevaist tasandi punktidest.

Sirgeid a ja b nimetatakse *riba äärsirgeteks*. Riba ab tähistatakse $[ab]$ (joon. 9.41).



Joon. 9.41



Joon. 9.42

Riba sisepiirkonnaks nimetatakse riba äärsirgete vahel asetsevat punktihulka.

Riba ristlõiguks nimetatakse riba äärsirgetega ristuvat lõiku, mille otspunktid on riba äärsirgetel (riba äärsirgete vaheline kaugus).

$[AB]$ on riba ab ristlõik (joon. 9.41).

Riba laiuseks nimetatakse riba ristlõigu pikkust.

Iga sirge s, mis on risti paralleelsete sirgetega a ja b, on sirgepaari $(a; b)$ sümmeetriatelg (joon. 9.42). Iga selline sirge on ka riba $[ab]$ sümmeetriatelg.

Sirget t, mis on paralleelne sirgetega a ja b ning läbib riba $[ab]$ ristlõigu KL keskpunkti, on samuti sirgepaari $(a; b)$ sümmeetriatelg. Sirge t on ka punktide K ja L sümmeetriatelg, seega riba $[ab]$ ristlõigu KL keskristsirge ja riba $[ab]$ sümmeetriatelg. Et sirge t iga punkt on riba $[ab]$ äärsirgetest võrdsetel kaugustel, siis nimetatakse sirget t *riba* $[ab]$ *kesksirgeks.*

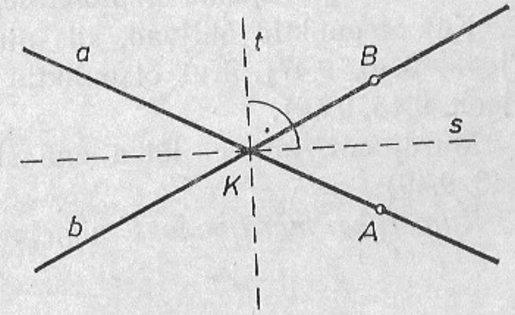
Riba kesksirge on riba kõigi sümmeetriakeskpunktide hulk.

9.3.7. LÕIKUVATE SIRGETE PAARI SÜMMEETRIATELG. NURGAPOOLITAJA.

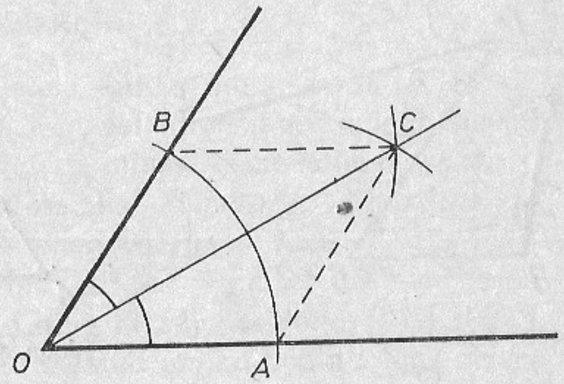
Lõikuvate sirgete paari $(a; b)$ sümmeetriatelje leidmiseks märgitakse sirgete lõikepunktist K võrdsetel kaugustel kaks punkti, üks sirgel a ja teine sirgel b: $A \in a$; $B \in b$ ja $AK = BK$ (joon. 9.43). Sirgepaari $(a; b)$ sümmeetriateljeks on siis punktide A ja B sümmeetriatelg, mis läbib punkti K. Lõikuvate sirgete paaril on 2 sümmeetriatelge: sirged s ja t. Teljed läbivad sirgete lõikepunkti ja on teineteisega risti: $s \perp t$.

Tasandi kõigi nende punktide hulk, mis on võrdsetel kaugustel lõikuvatest sirgetest a ja b, on sirgepaari $(a; b)$ sümmeetriatelgede paar.

Sirgetevahelise nurga sümmeetriatelge nimetatakse ka nurgapoolitajaks, sest ta jaotab nurga kaheks suuruselt võrdseks nurgaks. Edaspidi loeme nurgapoolitajaks vaid seda nurga sümmeetriatelje kiirt, mis lähtub nurga tipust ja on nurga sisepiirkonnas.



Joon. 9.43



Joon. 9.44

Nurgapoolitaja on tasandi kõigi nende punktide hulk, mis on võrdsetel kaugustel nurga haaradest.

Ülesanne. Joonestada antud nurga poolitaja (joon. 9.44). Joonestame kaare keskpunktiga nurga tipus nii, et see lõikaks nurga haarasid punktides A ja B. Saadud punktidest joonestame sama raadiusega kaared. Saadud kaarte lõikepunkti C ja nurga tippu läbiv sirge on nurgapoolitaja. $\angle AOC = \angle BOC$.

9.4. KOLMNURK.

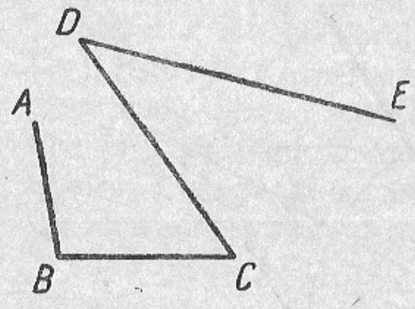
9.4.1. MURDJOON.

Märgime tasandil punktid A, B, C, D ja E nii, et kolm järjestikust punkti ei asetseks ühel sirgel. Ühendame need punktid järjestikku sirglõikudega (joon. 9.45). Saadud kujundit nimetatakse *murdjooneks*. Antud punkte ühendavad sirglõigud on *murdjoone lülid* ja sirglõikude otspunktid *murdjoone tipud*. Kaht tippu, millest väljub ainult üks murdjoone lüli (A ja E joonisel 9.45), nimetatakse *murdjoone otspunktideks*.

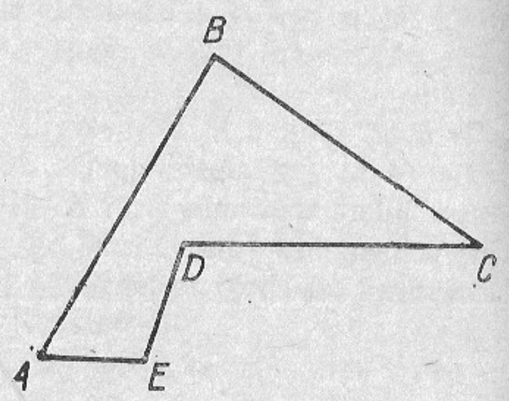
Kui otspunktid ühtivad, siis nimetatakse murdjoont *kinniseks* (joon. 9.46, 9.47). Kui otspunktid ei ühti, on murdjoon *lahtine* (joon. 9.45, 9.48).

Murdjoont, mis ei lõika ennast, nimetatakse *lihtsaks* (joon. 9.46, 9.49).

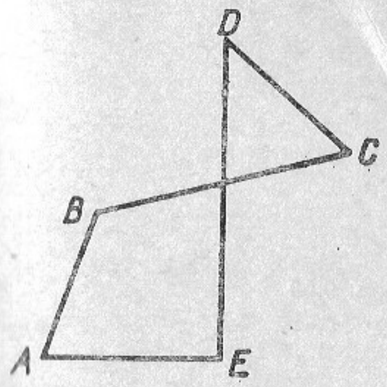
Kumeraks murdjooneks nimetatakse sellist murdjoont, mille



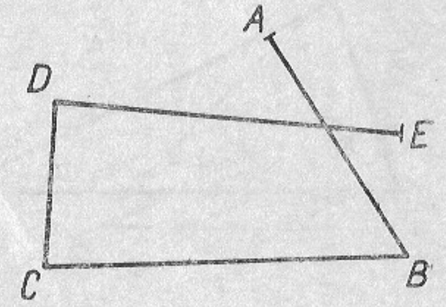
Joon. 9.45



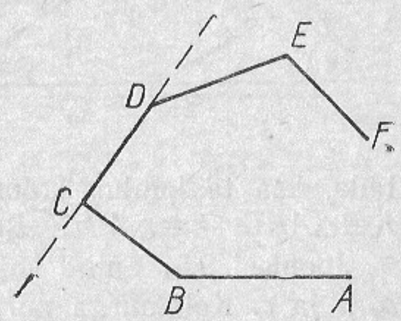
Joon. 9.46



Joon. 9.47



Joon. 9.48



Joon. 9.49

igast kolmest järjestikusest lülist kaks äärmist on ühel ja samal pool sirget, mille määrab keskmine lüli.

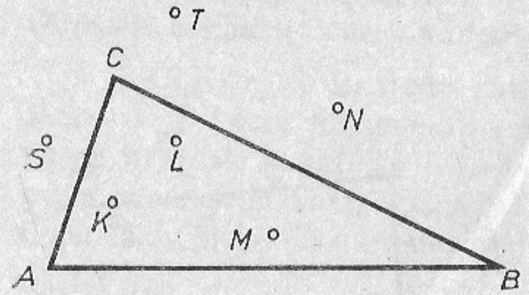
Joonisel 9.49 on kujutatud kumer lahtine murdjoon.

Iga murdjoon on pikem tema otspunkte ühendavast sirglõigust.

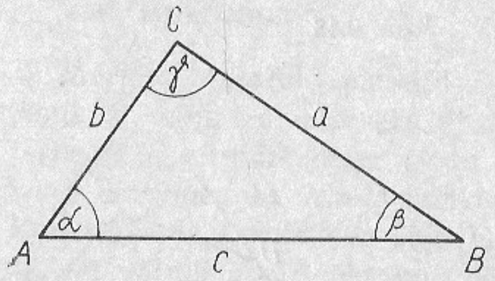
9.4.2. KOLMNURK, TEMA ELEMENDID.

Joonestame kinnise murdjoone, mille tipud on A, B ja C. Hulka, mille elementideks on seespool kinnist murdjoont olevad punktid koos murdjoone punktidega, nimetatakse *kolmnurgaks*.

Murdjoone tippe nimetatakse ka *kolmnurga tippudeks* ja murdjoone lülisid *kolmnurga külgedeks* (joon. 9.50). Kirjas märgitakse kolmnurka ABC lühidalt $\triangle ABC$. Joonisel 9.50 on punktid A, B ja C kolmnurga tipud ning murdjoone lülid $[AB]$, $[BC]$ ja $[AC]$ kolmnurga küljed. Iga tasandi punkti kohta võime otsus-



Joon. 9.50



Joon. 9.51

tada, kas ta kuulub kolmnurga punktihulka või mitte. Näiteks $K \in \triangle ABC$; $L \in \triangle ABC$; $B \in \triangle ABC$; kuid $S \notin \triangle ABC$.

Joonisel 9.51 antud kolmnurga küljed on AB, BC ja AC ehk a, b ja c. Kolmnurga nurgad on $\angle BAC$, $\angle ABC$ ja $\angle ACB$ ehk α, β ja γ. Külje AB (ehk c) vastastipp on C. Tipu A vastaskülg on BC (ehk a). Külg AC on nurga β vastaskülg. Nurk α on külje BC vastasnurk. Küljed AB ja AC on nurga α lähisküljed. Nurgad α ja β on külje AB lähisnurgad.

Ristlõiku, mis on joonestatud kolmnurga tipust vastasküljele või selle pikendusele, nimetatakse kolmnurga kõrguseks. Külge, mille vastastipust on joonestatud kolmnurga kõrgus, nimetatakse kolmnurga aluseks.

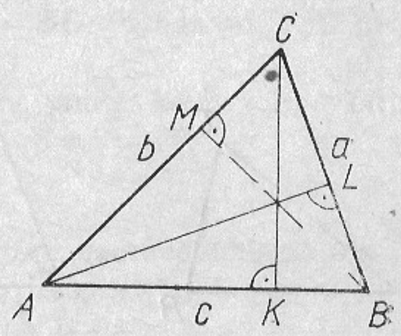
Kolmnurga kõrgus on pikkuselt võrdne tipu kaugusega sirgest, millel on kolmnurga alus. Kõrguse saab joonestada kolmnurga igast tipust. Kolmnurgal on niisiis kolm üldiselt erineva pikkusega kõrgust.

Joonisel 9.52 on CK alusele AB joonestatud kõrgus (h_c).

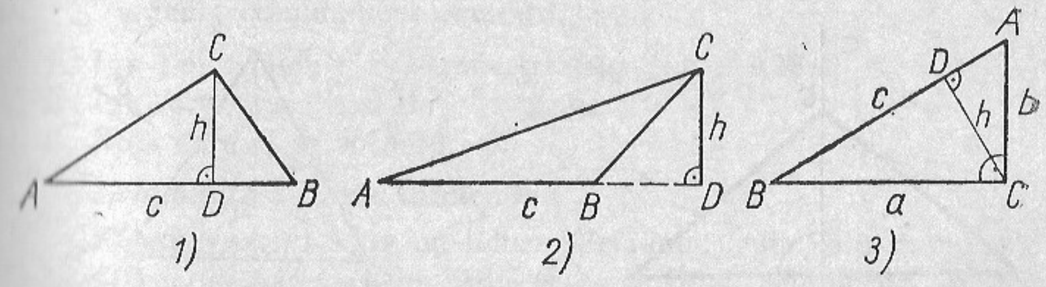
AL alusel BC joonestatud kõrgus (h_a),

BM alusele AC joonestatud kõrgus (h_b).

Kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis. Harilikult kasuta-



Joon. 9.52



Joon. 9.53

takse ainult üht kõrgust, mille võib kolme kõrguse hulgast vabalt valida. Siit selgub ühtlasi, et kolmnurga aluseks võib võtta tema iga külje.

Joonisel 9.53 on toodud näiteid erinevate kolmnurkade kõrguste kohta:

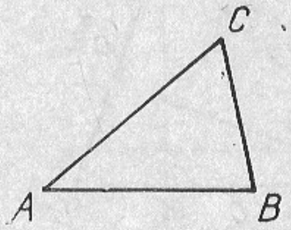
1) alus $AB=c$, kõrgus $CD=h$;
2) alus $AB=c$, kõrgus $CD=h$;
3) alus $AB=c$ (või $BC=a$); kõrgus $CD=h$ (või $AC=b$).

9.4.3. KOLMNURKADE LIIGITAMINE

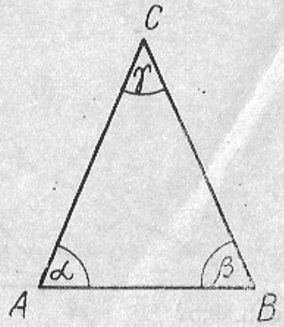
Kolmnurki liigitatakse külgede järgi isekülgseteks, võrdhaarseteks ja võrdkülgseteks (joon. 9.54, 9.55, 9.56).

Isekülgseks nimetatakse kolmnurka, mille kõik küljed on erinevad.

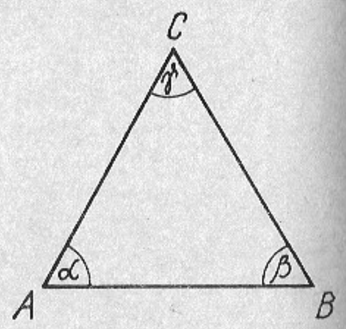
Võrdhaarseks nimetatakse kolmnurka, mille kaks külge on



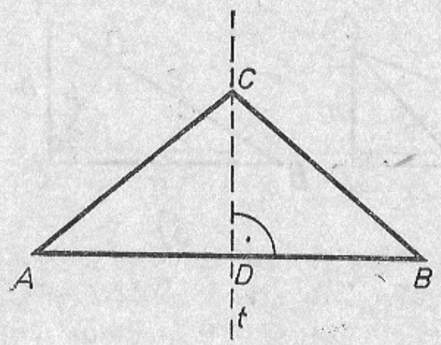
Joon. 9.54



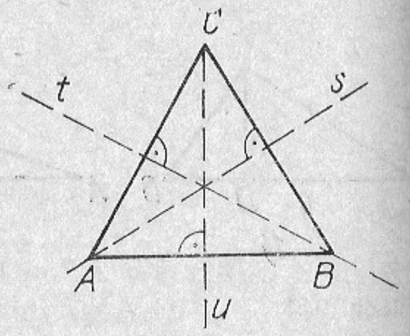
Joon. 9.55



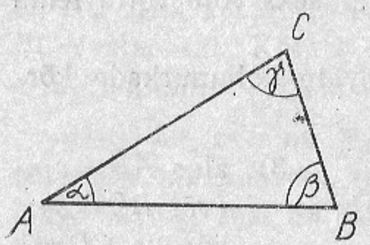
Joon. 9.56



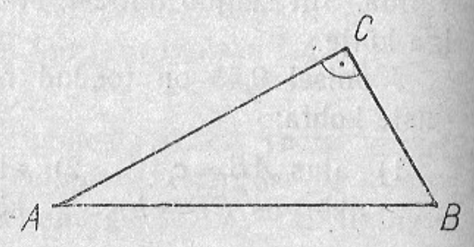
Joon. 9.57



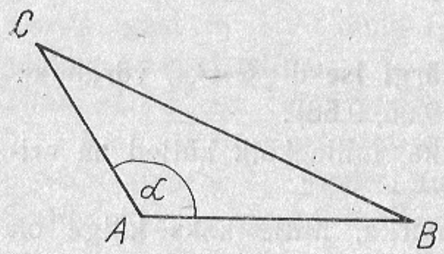
Joon. 9.58



Joon. 9.59



Joon. 9.60



Joon. 9.61

võrdsed. Joonisel 9.55 AB on alus, $AC=BC$ on haarad, γ tipunurk ja $\alpha=\beta$ alusnurgad.

Võrdkülgseks nimetatakse kolmnurka, mille kolm külge on võrdsed. Joonisel 9.56 $AB=BC=AC$, $\alpha=\beta=\gamma=60°$.

Võrdhaarse kolmnurga omadusi.

1. Võrdhaarne kolmnurk on sümmeetriline haarade ühisest otspunktist joonestatud kõrguse suhtes (joon. 9.57).
2. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab tipunurga.
3. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab aluse.
4. Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Võrdkülgse kolmnurga omadusi.

1. Iga tippu läbib üks sümmeetriatelg (joon. 9.58).
2. Iga kõrgus poolitab aluse ja nurga.
3. Kõik nurgad on võrdsed.

Kolmnurga külgede võrdlemine.

Kolmnurga iga külg on lühem ülejäänud kahe külje summast ja pikem ülejäänud kahe külje vahest. Olgu kolmnurga küljed a, b ja c, siis $c<a+b$ ja $c>b-a$, samuti $a>c-b$.

Kolmnurki liigitatakse nurkade järgi teravnurkseteks, täisnurkseteks ja nürinurkseteks.

Teravnurkses kolmnurgas on kõik nurgad teravnurgad. Joonisel 9.59 $\alpha<90°$, $\beta<90°$, $\gamma<90°$.

Täisnurkses kolmnurgas on üks nurkadest täisnurk. Joonisel 9.60 AC ja BC on kaatetid, AB on hüpotenuus, $\widehat{ACB}=90°$.

Nürinurkses kolmnurgas on üks nurkadest nürinurk. Joonisel 9.61 $90°<\alpha<180°$.

9.4.4. KOLMNURGA ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Kolmnurga ümbermõõt on kolmnurga külgede pikkuste summa.

$P=a+b+c$ (joon. 9.52).

Kolmnurga pindala on võrdne kolmnurga aluse ja kõrguse poole korrutisega

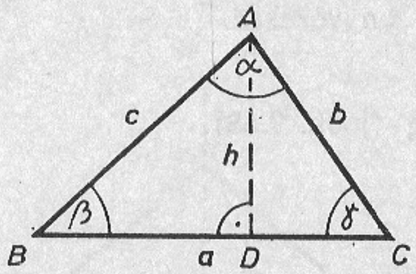
$$S_{ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$ (joon. 9.52 ja jaot. 9.4.2.).

Täisnurkse kolmnurga pindala võib arvutada ka kaatetite kaudu.

Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub kaatetite poole korrutisega.

$S=\frac{BC\cdot AC}{2}$ ehk $S=\frac{a\cdot b}{2}$ (joon. 9.53, 3).

Kolmnurga pindala võrdub kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega. (joon. 9.62.)



Joon. 9.62

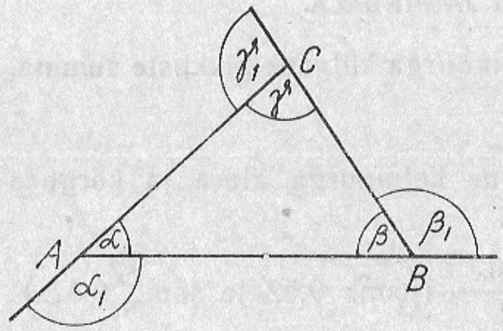
$S=\frac{1}{2}ah$. $\sin\beta=\frac{h}{c}$; $h=c\sin\beta$, $\sin\gamma=\frac{h}{b}$, $h=b\sin\gamma$.

$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Analoogiliselt $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

9.4.5. KOLMNURGA SISENURK JA VÄLISNURK.

Kolmnurga nurki nimetatakse tema sisenurkadeks.

Kolmnurga välisnurgaks nimetatakse kolmnurga sisenurga kõrvunurka. Joonisel 9.63 α_1, β_1 ja γ_1 on välisnurgad.



Joon. 9.63

Kolmnurga välisnurk võrdub nende sisenurkade summaga, mis ei ole tema kõrvunurgad.

$\alpha_1=\beta+\gamma$; $\beta_1=\alpha+\gamma$; $\gamma_1=\alpha+\beta$

Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

Kolmnurga välisnurkade summa võrdub täispöördega.

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360°$

9.4.6. LÕIGUD KOLMNURGAS.

Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse tema kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku.

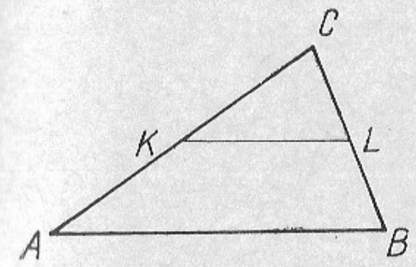
$\left.\begin{matrix}AK=KC\\BL=LC\end{matrix}\right\}\Rightarrow KL$ on $\triangle ABC$ kesklõik (joon. 9.64).

Kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest.

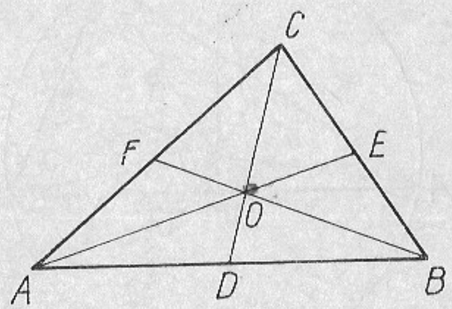
$\left.\begin{matrix}AK=KC\\BL=LC\end{matrix}\right\}\Rightarrow KL\parallel AB$ ja $KL=\frac{1}{2}AB$ ehk

$[K]\parallel[AB]\wedge KL=0{,}5AB$ (joon. 9.64).

Kolmnurga mediaaniks nimetatakse lõiku, mis ühendab kolmnurga tippu selle vastaskülje keskpunktiga. Joonisel 9.65 on mediaanid AE, BF ja CD.



Joon. 9.64



Joon. 9.65

Kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1 vastavast tipust arvates.

$AO:OE=2:1 \Rightarrow OE:AE=1:3$;

$BO:OF=2:1 \Rightarrow OF:BF=1:3$;

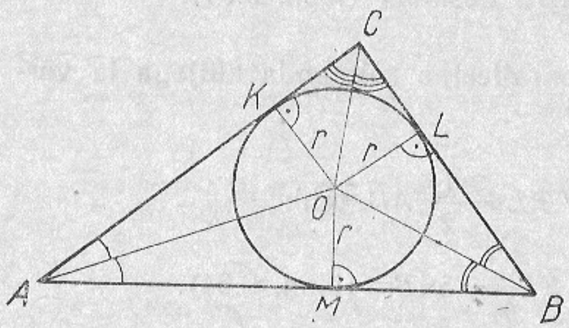
$CO:OD=2:1 \Rightarrow OD:CD=1:3$ (joon. 9.65).

Kolmnurga mediaanide lõikepunkti nimetatakse ka *kolmnurga raskuskeskmeks.*

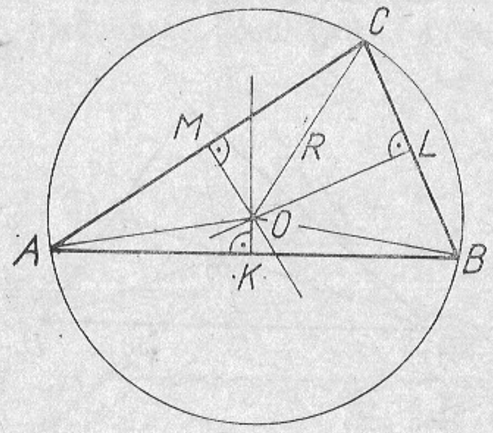
Kolmnurga kõrgused lõikuvad kõik ühes punktis.

Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

$OK=OL=OM=r$; r on siseringjoone raadius (joon. 9.66).



Joon. 9.66



Joon. 9.67

Kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, mis on kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

$$\left.\begin{array}{l} AM=MC;\ AK=KB;\ BL=LC \\ OM\perp AC;\ OK\perp AB;\ OL\perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AO=BO=CO=R;$$

R on ümberringjoone raadius (joon. 9.67).

9.4.7. KOLMNURGA SISERINGJOON JA ÜMBERRINGJOON.

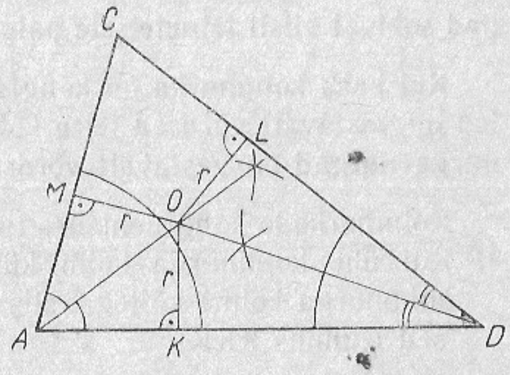
Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt on võrdsetel kaugustel kolmnurga külgedest.

Ringjoont, mille keskpunktiks on kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks selle punkti kaugus kolmnurga küljest, nimetatakse kolmnurga siseringjooneks.

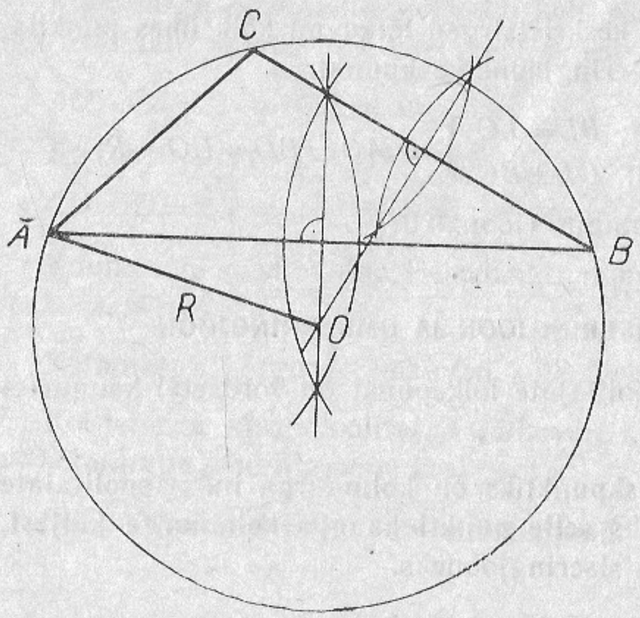
Kolmnurga siseringjoone joonestamiseks

1) joonestame kaks nurgapoolitajat nende lõikepunktini;
2) lõikepunktist joonestame ristlõigu kolmnurga küljele;
3) joonestame siseringjoone, võttes raadiuseks saadud ristlõigu pikkuse ja keskpunktiks nurgapoolitajate lõikepunkti (joon. 9.68).

Ringjoone puutujaks nimetatakse sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt. Kuna kolmnurga küljel on siseringjoonega ainult üks ühine punkt, siis on kolmnurga küljed siseringjoone puutujaks. Iga kolme punkti, mis ei ole ühel sirgel, läbib ringjoon. Selliseid ringjooni on ainult üks.



Joon. 9.68



Joon. 9.69

Ringjoont, mis läbib kolmnurga tippe, nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks. Kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks on kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt. Kolmnurka, mille tipud on ringjoonel, nimetatakse *kõõlkolmnurgaks.*

Kolmnurga ümberringjoone joonestamiseks

1) joonestame kolmnurga kahele küljele kui lõikudele keskristsirged;
2) saadud sirgete lõikepunktist O joonestame ringjoone raadiusega $R=OA=OB=OC$ (joon. 9.69).

9.4.8. KOLMNURKADE KONGRUENTSUS.

Kahte tasapinnalist kujundit nimetatakse kongruentseteks, kui nad sobival viisil teineteisele paigutatult ühtivad.

Kui kaks kolmnurka on kongruentsed, siis ühe kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega ja ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega.

Kolmnurkade kongruentsuse tunnused.

1. Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis need kolmnurgad on kongruentsed (tunnus KKK).

$$\left.\begin{aligned} AB&=A_1B_1\\ BC&=B_1C_1\\ AC&=A_1C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1 \quad \text{(joon. 9.70)}.$$

2. Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga, siis need kolmnurgad on kongruentsed (tunnus KNK).

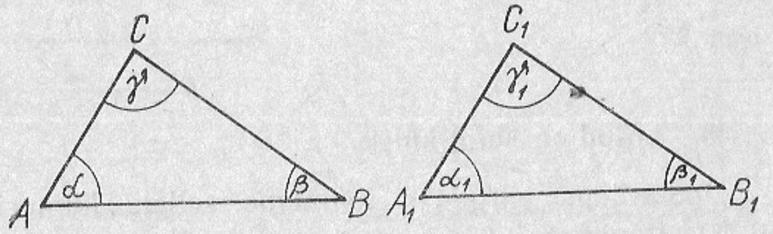
$$\left.\begin{aligned} AB&=A_1B_1\\ AC&=A_1C_1\\ \alpha&=\alpha_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1 \quad \text{(joon. 9.70)}.$$

3. Kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle lähisnurkadega, siis need kolmnurgad on kongruentsed (tunnus NKN).

$$\left.\begin{aligned} AB&=A_1B_1\\ \alpha&=\alpha_1\\ \beta&=\beta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1 \quad \text{(joon. 9.70)}.$$

4. Kui ühe kolmnurga kaks külge ja pikema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja pikema külje vastasnurgaga, siis need kolmnurgad on kongruentsed (tunnus KkN).

$$\left.\begin{aligned} AB&=A_1B_1\\ AC&=A_1C_1\\ AB&>AC\\ \gamma&=\gamma_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1 \quad \text{(joon. 9.70)}.$$



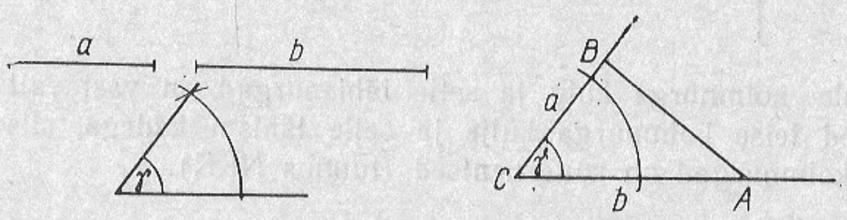
Joon. 9.70

9.4.9. KOLMNURGA JOONESTAMINE.

Ülesanne. Joonestada kolmnurk tema antud elementide järgi.

1. Antud on üks nurk ja selle lähisküljed.

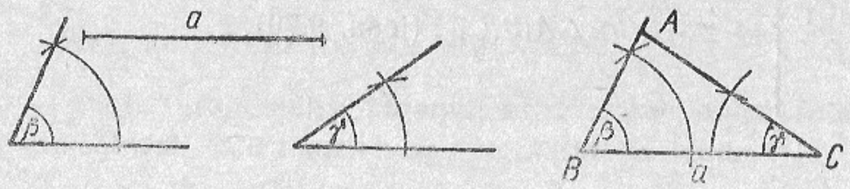
Joonestame kiire CA ja kanname sellele lõigu $CA=b$ (joon. 9.71). Joonestame nurgaga γ võrdse nurga ACB ning selle teisele haarale kanname lõigu $CB=a$. Ühendame lõiguga punktid A ja B. Saame nõutava kolmnurga ABC.



Joon. 9.71

2. Antud on külg ja selle lähisnurgad.

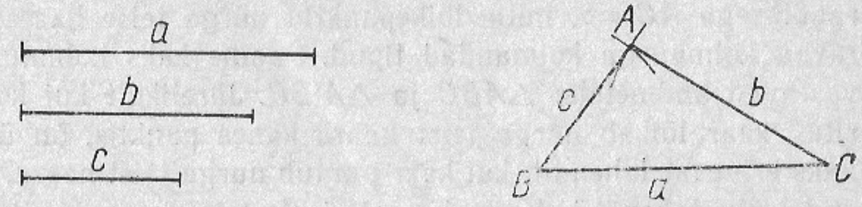
Joonestame sirge ja kanname sellele lõigu $BC=a$ (joon. 9.72). Joonestame nurgaga β võrdse nurga ABC ja nurgaga γ võrdse nurga ACB. Nurkade teiste haarade lõikepunkt on kolmnurga kolmandaks tipuks. Saame nõutava kolmnurga ABC.



Joon. 9.72

3. Antud on kolm külge.

Joonestame sirge ja kanname sellele lõigu $BC=a$ (joon. 9.73). Punktist B tõmbame kaare raadiusega $BA=c$ ja punktist C kaare raadiusega $AC=b$. Nende lõikepunkt määrab kolmnurga



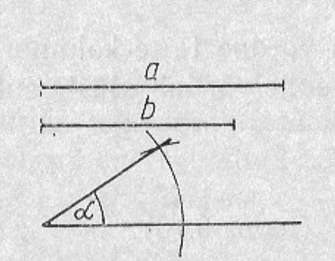
Joon. 9.73

kolmanda tipu A. Saame nõutava kolmnurga ABC. Kui $b+c \leqslant a$, siis ülesandel puudub lahend.

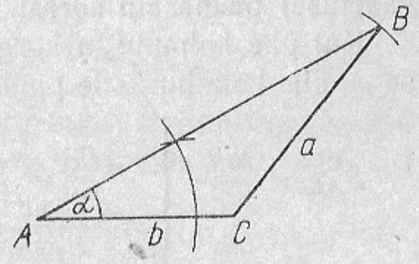
4. Antud on kaks külge ja ühe külje vastasnurk.

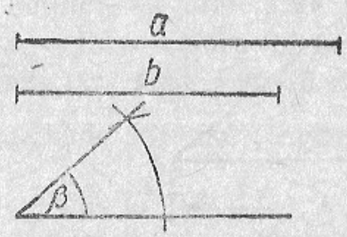
Joonestame sirge ja kanname sellele lõigu $AC=b$ (joon. 9.74). Joonestame nurga $CAB=\alpha$. Punktist C tõmbame kaare raadiusega $CB=a$, mille lõikepunkt nurga α teise haaraga määrab kolmnurga kolmanda tipu B. Saame nõutava kolmnurga ABC.

Joonestame sirge ja kanname sellele lõigu $BC=a$ (joon. 9.75). Joonestame nurga $CBA=\beta$. Punktist C tõmbame kaare

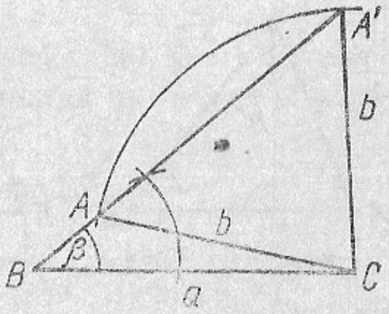


Joon. 9.74





Jóon. 9.75



raadiusega $AC=b$, mille lõikepunktid nurga teise haaraga määravad kolmnurga kolmandad tipud. Saame kaks kolmnurka, mis vastavad andmetele: $\triangle ABC$ ja $\triangle A'BC$. Järelikult kui konstrueeritav kaar lõikab nurga teist haara kahes punktis, on ülesandel kaks erinevat lahendit, kui kaar puutub nurga teist haara, on ülesandel üks lahend, kui aga kaarel ei ole teise haaraga ühtki ühist punkti, siis ülesandel puudub lahend.

9.4.10. LÕIKUDE SUHE, VÕRRE.

Kahe lõigu suhteks nimetatakse nende lõikude pikkuste suhet.

Lõigud a ja c on võrdelised neile vastavate lõikudega b ja d, kui lõikude suhted $a:b$ ja $c:d$ on võrdsed.

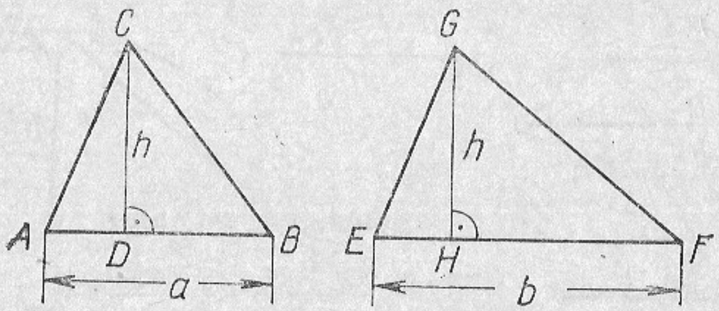
$\frac{a}{b}=k$; $\frac{c}{d}=k$, kus k on lõikude a ja c võrdetegur lõikude b ja d suhtes.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

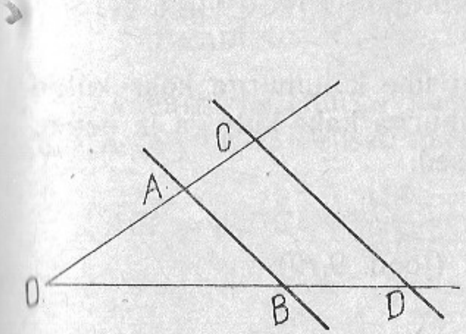
Võrdelisusest saame rääkida vähemalt nelja lõigu (arvulise väärtuse) olemasolu korral.

Kui ühe kolmnurga kõrgus on võrdne teise kolmnurga kõrgusega, siis kolmnurkade pindalade suhe võrdub aluste suhtega.

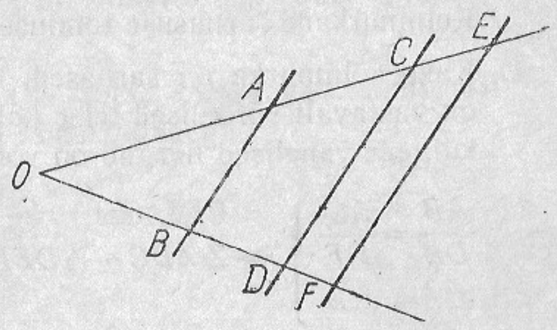
$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{ah}{2}\\ S_{EFG}&=\frac{bh}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{EFG}}=\frac{a}{b}$$ (joon. 9.76).



Joon. 9.76



Joon. 9.77



Joon. 9.78

Nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad:

$$AB\parallel CD\Rightarrow\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OB}$$ (joon. 9.77).

Kui nurga haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega, siis ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

$$AB\parallel CD\parallel EF\ldots\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\ldots$$ (joon. 9.78).

Samuti on õige pöördlause.

Kui nurga haarade lõikamisel sirgetega ühel nurga haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega, siis need sirged on paralleelsed.

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\ldots\Rightarrow AB\parallel CD\parallel EF\ldots$$ (joon. 9.78).

9.4.11. KOLMNURKADE SARNASUS.

Kaht kolmnurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

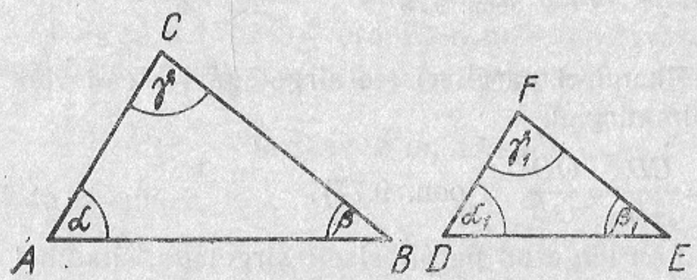
Kolmnurkade sarnasust märgitakse sümboliga $\sim$.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\alpha_1,\ \beta=\beta_1,\ \gamma=\gamma_1\\ &\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\sim\triangle DEF$$ (joon. 9.79).

Kolmnurkade sarnasuse tunnused.

1. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\\ \angle A=\angle D\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle DEF \quad \text{(joon. 9.79)}.$$



Joon. 9.79

2. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle D\\ \angle B=\angle E\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle DEF \quad \text{(joon. 9.79)}.$$

3. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle DEF \quad \text{(joon. 9.79)}.$$

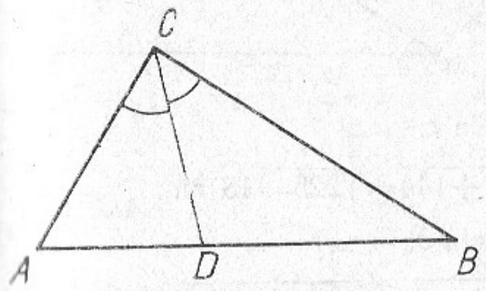
4. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb nimetatud küljepaari suurema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\\ AC>AB\\ DF>DE\\ \angle B=\angle E\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle DEF \quad \text{(joon. 9.79)}.$$

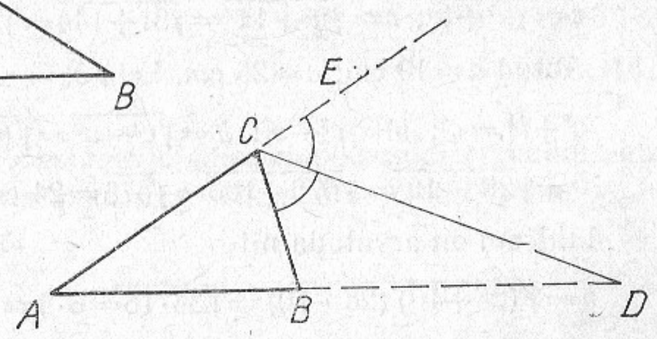
9.4.12. KOLMNURGA SISENURGA JA VÄLISNURGA POOLITAJA OMADUS.

Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab nurga vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised nurga lähiskülgedega.

$$\angle ACD=\angle DCB\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{DB}{CB} \quad \text{(joon. 9.80)}.$$



Joon. 9.80



Joon. 9.81

Kolmnurga välisnurga poolitaja lõikab vastaskülje poolt määratud sirget punktis, mille kaugused vastaskülje otspunktidest on võrdelised lähiskülgedega.

$$\angle BCD=\angle DCE\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC} \quad \text{(joon. 9.81)}.$$

9.4.13. MEETRILISED SEOSED TÄISNURKSES KOLMNURGAS.

1. Pythagorase teoreem.

Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.

$a^2+b^2=c^2$ (joon. 9.82).

Teoreem võimaldab täisnurkse kolmnurga kahe antud külje järgi arvutada kolmandat külge.

Näited.

a) Antud $c=20$ cm; $g=5$ cm. Leia b.

$b^2=gc$; $b=\sqrt{gc}$; $b=\sqrt{5\cdot 20}=\sqrt{100}=10$ cm.

b) Antud $a=2{,}4$ dm; $f=0{,}6$ dm. Leia c.

$a^2=fc$; $c=\frac{a^2}{f}$; $c=\frac{2{,}4^2}{0{,}6}=\frac{5{,}76}{0{,}6}=9{,}6$ dm.

c) Antud $c=12$ cm; $b=6$ cm. Leia g.

$b^2=gc$; $g=\frac{b^2}{c}$; $g=\frac{6^2}{12}=\frac{36}{12}=3$ cm.

3. Kõrguse teoreem.

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrguse ruut võrdub kaatetite projektsioonide korrutisega.

$h^2=gf$ (joon. 9.85).

Näited.

a) Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus jaotab hüpotenuusi lõikudeks 12 cm ja 3 cm. Leia kõrgus.

Antud $g=12$ cm; $f=3$ cm. Leia h.

$h^2=gf$; $h=\sqrt{gf}$; $h=\sqrt{12\cdot 3}=\sqrt{36}=6$ cm.

b) Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on 12 cm ja hüpotenuus 26 cm. Leia kaatetite projektsioonid.

Antud $h=12$ cm; $c=26$ cm. Leia g ja f.

$h^2=gf$; $f+g=c$; $\Rightarrow \begin{cases} gf=12^2 \\ g+f=26; \end{cases} \quad \begin{cases} gf=144 \\ g=26-f; \end{cases}$

$(26-f)f=144$; $26f-f^2=144$; $f^2-26f+144=0$;

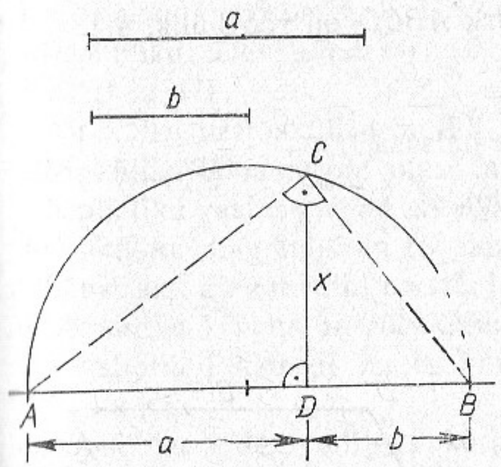
$f=13\pm\sqrt{169-144}=13\pm\sqrt{25}$;

$f=13\pm 5$; $\begin{cases} f_1=8 \\ g_1=18 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2=18 \\ g_2=8. \end{cases}$

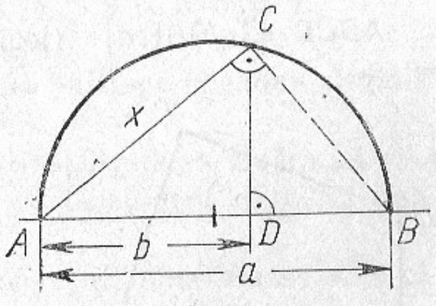
9.4.14. GEOMEETRILISE KESKMISE KONSTRUKTSIOON.

Kahe arvu geomeetriliseks keskmiseks nimetatakse ruutjuurt nende arvude korrutisest. Avaldis $x=\sqrt{mn}$ tähendab, et arv x on arvude m ja n geomeetriline keskmine. Kahe lõigu geomeetrilise keskmise võime leida ka konstruktsiooni teel lõiguna, kasutades Eukleidese teoreemi või teoreemi kõrgusest.

Konstrueerime kahe antud lõigu geomeetrilise keskmise. Antud on lõigud a ja b. Leida $x=\sqrt{ab}$ (joon. 9.86 ja 9.87).



Joon. 9.86



Joon. 9.87

1. Joonestame lõigu a+b ja ehitame sellele kui diameetrile poolringjoone. Lõikude a ja b ühisest punktist D joonestame $CD\perp AB$, nii et C asuks poolringjoonel. Kuna $\triangle ABC$ on täisnurkne, siis kõrguse teoreemi järgi $CD=x=\sqrt{ab}$ (joon. 9.86).

2. Kanname lõigu b lõigule a tema otspunktist. Joonestame lõigule a kui diameetrile poolringjoone. Lõigu b otspunktist joonestame ristlõigu CD diameetrile AB, nii et C asuks poolringjoonel. Kuna $\triangle ABC$ on täisnurkne, siis Eukleidese teoreemi järgi

$AC=\sqrt{AD\cdot AB}$; $x=\sqrt{ab}$ (joon. 9.87).

9.5. RÖÖPKÜLIK.

9.5.1. RÖÖPKÜLIK.

Joonisel 9.88 on kinnine lihtne murdjoon, mille tipud on A, B, C ja D. Hulka, mille elementideks on seespool seda murdjoont olevad punktid koos murdjoone punktidega, nimetatakse nelinurgaks. Murdjoone tippe nimetatakse nelinurga tippudeks ja murdjoone lülisid nelinurga külgedeks.

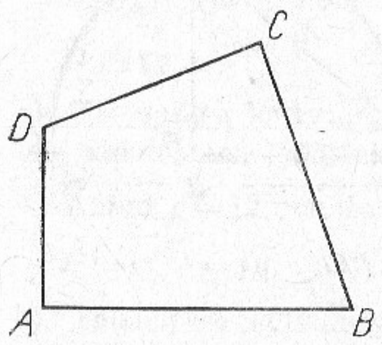
Nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed, nimetatakse rööpkülikuks.

Joonisel 9.89 kujutatud nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, s. t.

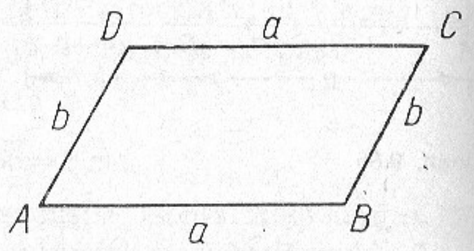
$[AB] \parallel [CD] \wedge [AD] \parallel [BC]$.

Rööpkülik on kahe lõikuva riba ühisosa.

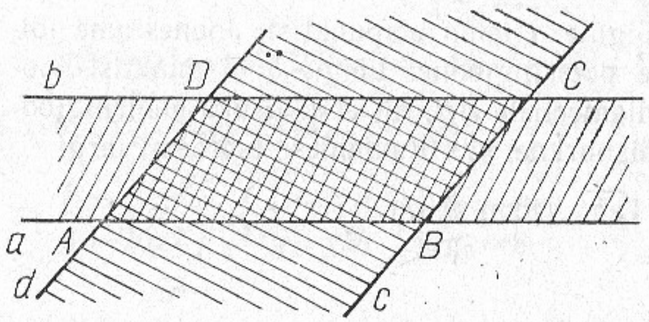
$ABCD = [ab] \cap [cd]$ (joon. 9.90).



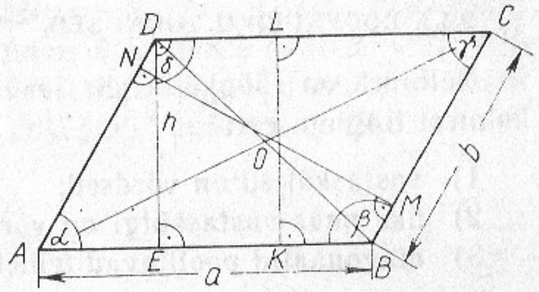
Joon. 9.88



Joon. 9.89



Joon. 9.90



Joon. 9.91

Joonisel 9.91 on kujutatud rööpkülik $ABCD$.
Rööpküliku küljed on $AB = CD = a$ ja $BC = AD = b$.
Rööpküliku tipud on A, B, C ja D, vastastipud on A ja C, B ja D.
Rööpküliku lähisküljed on AB ja BC, BC ja CD, CD ja AD, AD ja AB.
Rööpküliku vastasküljed on AB ja CD ning BC ja AD.
Rööpküliku lähisnurgad on α ja β, β ja γ, γ ja δ, δ ja α.
Rööpküliku vastasnurgad on α ja γ, β ja δ.
Rööpküliku diagonaal on rööpküliku vastastippe ühendav sirglõik.
Rööpküliku diagonaalid on AC ja BD.
Rööpküliku kõrgus on rööpküliku vastaskülgedega määratud riba ristlõik. Pikkuselt on ta võrdne vastaskülgede vahelise kaugusega.
Rööpküliku külge, millega kõrgus on risti, nimetatakse rööpküliku aluseks.
Kui rööpküliku alus on AB, siis kõrguseks on KL; kui alus on BC, siis kõrguseks on MN.

9.5.2. RÖÖPKÜLIKU OMADUSED.

Rööpküliku tähtsamad omadused on järgmised:

1) diagonaalide lõikepunkt on tema sümmeetriakeskpunkt;
2) vastasküljed on võrdsed;
3) vastasnurgad on võrdsed;
4) lähisnurkade summa on sirgnurk;
5) diagonaalid poolitavad teineteist;
6) diagonaal jaotab rööpküliku kongruentseteks kolmnurkadeks.

Rööpkülik on mittejäik kujund, sest tema nurki on võimalik muuta, muutmata külgi. Samal ajal näiteks kolmnurk on jäik kujund, kuna tema nurki pole võimalik muuta, muutmata külgi.

9.5.3. RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

Nelinurk on rööpkülik siis ja ainult siis, kui ta rahuldab üht kolmest tingimusest:

1) **vastasküljed on võrdsed;**
2) **üks paar vastaskülgi on võrdsed ja paralleelsed;**
3) **diagonaalid poolitavad teineteist.**

Tunnustena võib sõnastada ka rööpküliku omadused 3) ja 4) (jaot. 9.5.2.).

9.5.4. RÖÖPKÜLIKU ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Rööpküliku ümbermõõt võrdub kõigi tema külgede summaga.
Rööpküliku ümbermõõt on $P=2(a+b)$ (joon. 9.89).
Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.
Joonisel 9.91 kujutatud rööpküliku pindala on

$$S=AB\cdot DE=BC\cdot MN.$$

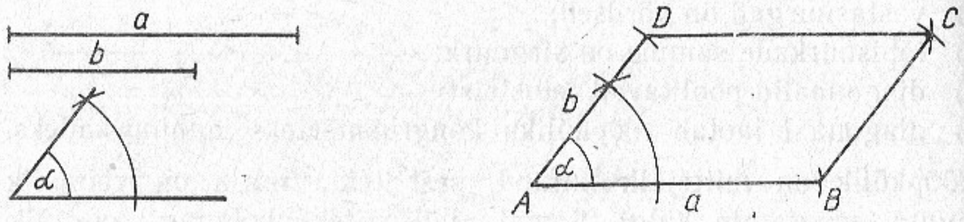
Eeskirja võib kirjutada valemina

$$S=a\cdot h,$$

kus a tähistab rööpküliku alust ja h tema vastavat kõrgust. Rööpküliku eriliigid on romb, ristkülik ja ruut.

9.5.5. RÖÖPKÜLIKU JOONESTAMINE.

Ülesanne. Joonestame rööpküliku, kui on antud tema kaks külge a ja b ning nendevaheline nurk α.



Joon. 9.92

Kanname sirgele lõigu $AB=a$ (joon. 9.92). Joonestame nurga α, võttes nurga tipuks punkti A ja üheks haaraks külje AB. Punktist B tõmbame kaare raadiusega b ja punktist D kaare raadiusega a. Saadud kaarte lõikepunkt määrab rööpküliku neljanda tipu C.

9.6. RISTKÜLIK.

9.6.1. RISTKÜLIK, RISTKÜLIKU OMADUSI.

Ristkülik on rööpkülik, mille lähisküljed on risti.

$AB\perp BC$, $BC\perp CD$ jne. (joon. 9.93).

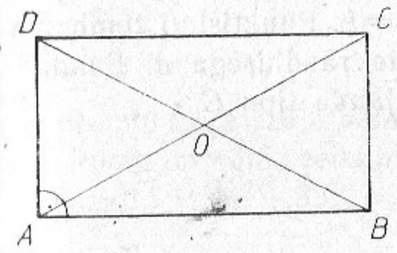
Ristkülik on kahe ristuvate äärtega riba ühisosa.

$ABCD=[ab]\cap[cd]$ (joon. 9.94).

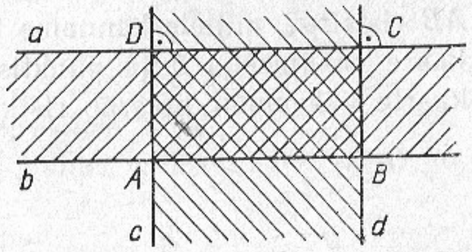
Ristküliku omadusi.

1. Ristkülikul on kõik rööpküliku omadused (jaot. 9.5.2.).
2. Ristküliku diagonaalid on võrdsed.

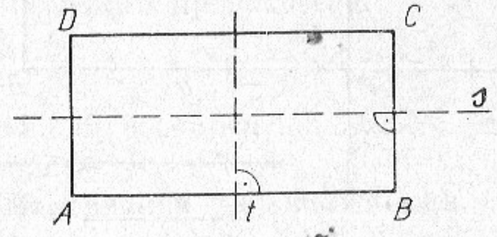
   $AC=BD$ (joon. 9.93).
3. Ristküliku ümber saame joonestada ringjoone.
4. Ristkülikul on kaks sümmeetriatelge: s ja t (joon. 9.95).



Joon. 9.93



Joon. 9.94



Joon. 9.95

9.6.2. RISTKÜLIKU ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Vaatleme joonisel 9.93 kujutatud ristkülikut. $AB=a$ on ristküliku pikkus (alus), $BC=b$ on ristküliku laius (kõrgus).

Ristküliku ümbermõõt võrdub kõigi tema külgede summaga.
Ristküliku ümbermõõt on:

$P=2(a+b)$.

Ristküliku pindala võrdub pikkuse ja laiuse korrutisega.

$S=ab$.

Näide.

Ristküliku pikkus on 12 cm, lauis 5 cm. Leiame ristküliku ümbermõõdu ja pindala.

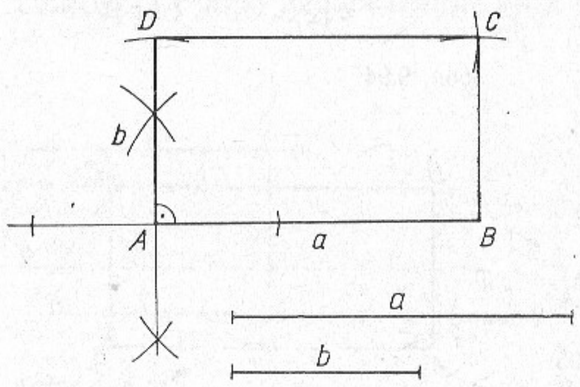
$P=2(12+5)=2\cdot 17=34$ cm;

$S=12\cdot 5=60$ cm^2.

9.6.3. RISTKÜLIKU KONSTRUEERIMINE.

Ülesanne. Konstrueerida ristkülik, kui on antud tema pikkus a ja laius b (joon. 9.96).

Joonestame lõigu $AB=a$. Punktist A konstrueerime lõigule AB ristsirge, millele kanname lõigu $AD=b$. Punktist B tõmbame kaare raadiusega b ja punktist D kaare raadiusega a. Saadud kaarte lõikepunkt määrab ristküliku neljanda tipu C.



Joon. 9.96

9.7. ROMB.

9.7.1. ROMB, ROMBI OMADUSI.

Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

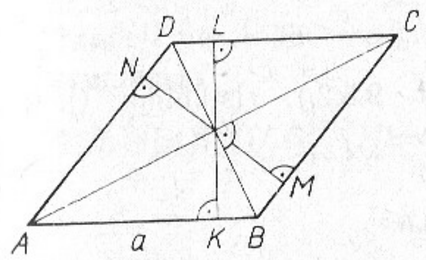
$AB=BC=CD=DA=a$ (joon. 9.97).

Rombi omadusi.

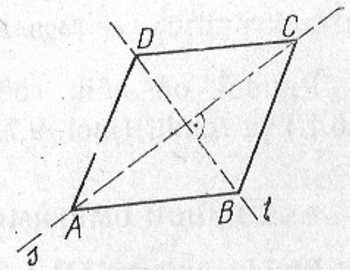
1. Rombil on kõik rööpküliku omadused (jaot. 9.5.2.).
2. Rombi diagonaalid on risti ja poolitavad rombi nurgad

   $AC\perp BD$, $\angle BAC=\angle DAC$, $\angle ABD=\angle CBD$ jne. (joon. 9.97).
3. Rombi kõrgused on võrdsed.

   $KL=MN$ (joon. 9.97).



Joon. 9.97



Joon. 9.98

4. Rombi sisse saab joonestada ringjoone.
5. Romb on sümmeetriline sirgete suhtes, mille määravad diagonaalid (joon. 9.98).

9.7.2. ROMBI ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Rombi ümbermõõt võrdub neljakordse küljepikkusega.

$P=4a$.

Rombi pindala võime arvutada kui rööpküliku pindala. Võime arvutada aga ka diagonaalide kaudu.

Rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.

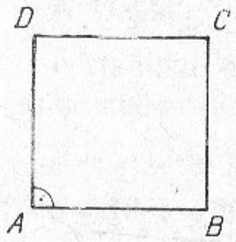
Tähistame rombi diagonaalid tähtedega d_1 ja d_2, siis saame pindala arvutamise eeskirja

$$S=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

9.8. RUUT.

9.8.1. RUUT, RUUDU OMADUSI.

Ruuduks nimetatakse võrdsete külgedega ristkülikut. Ruuduks nimetatakse ka rombi, mille lähisküljed on risti (joon. 9.99).



Joon. 9.99

Ruudul on kõik rööpküliku (jaot. 9.5.2.), ristküliku (jaot. 9.6.1.) ja rombi (jaot. 9.7.1.) omadused.

9.8.2. RUUDU ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Ruudu ümbermõõt võrdub neljakordse küljepikkusega.

$P=4a$.

Ruudu pindala võrdub küljepikkuse ruuduga.

$S=a^2$.

Ruudu pindala võime arvutada ka diagonaali kaudu.

Ruudu pindala võrdub poolega diagonaali ruudust.
Kui ruudu diagonaal tähistada tähega d, siis

$S=0{,}5 \cdot d^2$.

N ä i d e.

Ruudu küljepikkus on 15 dm. Leia ruudu ümbermõõt ja pindala.

$P=4 \cdot 15=60$ dm.
$S=15^2=225$ dm^2.

9.9. TRAPETS.

9.9.1. TRAPETS, TRAPETSITE LIIGITAMINE.

Nelinurka, mille kaks külge on paralleelsed ja kaks külge mitteparalleelsed, nimetatakse trapetsiks (joon. 9.100).

Trapetsiks nimetatakse riba ühisosa nurgaga, mille tipp on väljaspool riba ja haarad lõikavad riba ääri.

$[ab] \cap \angle AOB=ABCD$ (joon. 9.101).

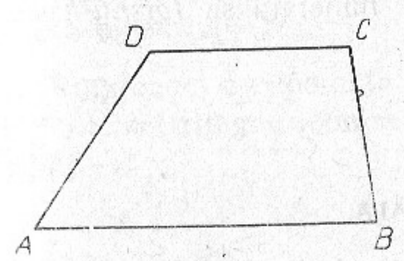
Paralleelseid külgi nimetatakse *trapetsi alusteks*; mitteparalleelseid *trapetsi haaradeks*.

Trapetsi alustega määratud riba ristlõiku nimetatakse *trapetsi kõrguseks*. Trapetsi kõrgus on risti alusega ja pikkuselt võrdne trapetsi aluste vahelise kaugusega (joon. 9.102).

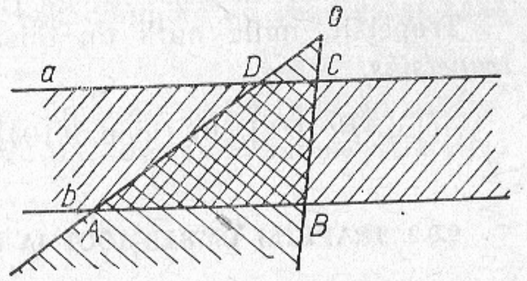
Trapetsi kesklõik on tema haarade keskpunkte ühendav lõik (joon. 9.102).

Trapetsi kesklõik on paralleelne alustega ja võrdub aluste poolsummaga.

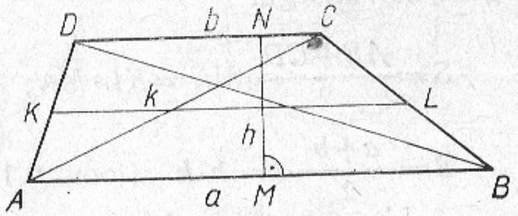
$[KL] \parallel [AB] \parallel [CD] \wedge KL=0{,}5(AB+CD)$ (joon. 9.102).



Joon. 9.100



Joon. 9.101

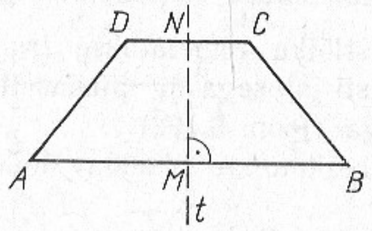


Joon. 9.102

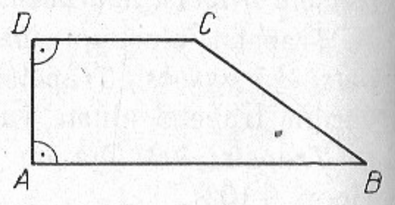
Trapetsi alused on $AB=a$ ja $CD=b$.
Trapetsi haarad on AD ja BC.
Trapetsi kõrgus on $MN=h$.
Trapetsi diagonaalid on AC ja BD.
KL on kesklõik, sest $AK=KD$ ja $BL=LC$.

Trapetsit, mille haarad on võrdsed, nimetatakse *võrdhaarseks trapetsiks*.

$AD=BC$ (joon. 9.103).



Joon. 9.103



Joon. 9.104

Võrdhaarsel trapetsil on üks sümmeetriatelg, (sirge t), mis on määratud aluste keskristsirgega (joon. 9.103).

Trapetsit, mille nurk on täisnurk, nimetatakse *täisnurkseks trapetsiks*.

$AD \perp AB$; $AD \perp DC$ (joon. 9.104).

9.9.2. TRAPETSI ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Trapetsi ümbermõõt on tema aluste ja haarade summa.

$P=AB+BC+CD+DA$ (joon. 9.100).

Trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma (kesklõigu) ja kõrguse korrutisega.

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot MN=KL\cdot MN;$$

$$\boldsymbol{S=\frac{a+b}{2}\cdot h=k\cdot h} \quad \text{(joon. 9.102)}.$$

9.10. RINGJOON JA RING.

9.10.1. RINGJOON. RING.

Ringjooneks, mille keskpunkt on O ja raadius r, nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kaugus punktist O on r, lühidalt $\{X|OX=r\}$. Näiteks punktid A, B ja C kuuluvad ringjoone punktihulka (joon. 9.105).

Ringiks, mille keskpunkt on O ja raadius r, nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kaugus punktist O on väiksem või võrdne raadiusega r, lühidalt $\{X|OX\leqslant r\}$. Näiteks punktid A, B, C, D ja E kuuluvad ringi punktihulka (joon. 9.105).

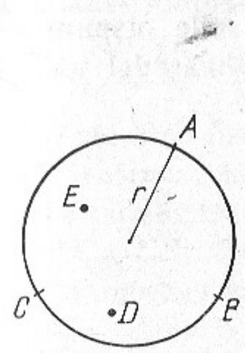
Joonestades ringjoone, jaotame tasandi punktihulga kolmeks osahulgaks. Esimest nimetame ringjooneks, teist ringi sisepiirkonnaks ja kolmandat ringi välispiirkonnaks.

Ringjoone (ringi) kõõl on sirglõik, mis ühendab kaht ringjoone punkti. Joonisel 9.106 on kujutatud kõõlud AB ja CD ning raadius r.

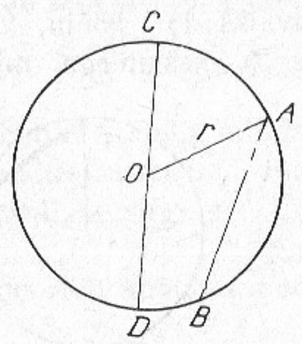
Ringjoone (ringi) diameeter on kõõl, mis läbib ringjoone (ringi) keskpunkti. Joonisel 9.106 kujutatud kõõl CD on diameeter. Diameetrit tähistatakse tähega d.

Ringjoone (ringi) diameeter ehk läbimõõt on raadiusest kaks korda pikem: $d=2r$.

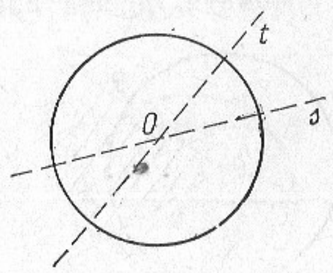
Ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi, mis on määratud diameetritega. Joonisel 9.107 on kujutatud sümmeetriateljed s ja t.



Joon. 9.105



Joon. 9.106



Joon. 9.107

9.10.2. SEOS RINGJOONE KAARTE, KESKNURKADE JA KÕÕLUDE VAHEL.

Joonisel 9.105 on kujutatud ringjoon ja sellel kaks punkti A ja B. Need punktid jaotavad ringjoone ülejäänud punktide hulga kaheks osahulgaks, mida koos jaotavate punktidega nimetatakse *ringjoone kaarteks*.

Punktid A ja B on kummagi kaare otspunktid. Kaart märgitakse lühidalt tema otspunktide ja kaare märgi $\frown$ abil.

Poolringjoonest väiksemat kaart märgitakse nii: $\frown AB$ (loe: *kaar AB*). Poolringjoone ja poolringjoonest suurema kaare märkimiseks võetakse abiks veel kolmas täht, mis märgitakse selle kaare juurde. Sel juhul märgitakse kaart nii: $\frown ACB$ (loe: *kaar ACB*).

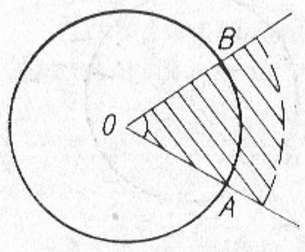
Kaare mõõtühikuna kasutatakse *kaarekraadi*. 1 kaarekraad, lühidalt 1°, on $\frac{1}{360}$ ringjoonest. Terve ringjoon on siis 360°. Pool ringjoonest on 180°.

Kaare suuruse ülesmärkimisel kirjutatakse kaare märk kaare otspunkti tähistavate tähtede peale. Näiteks $\overset{\frown}{AB}=50°$.

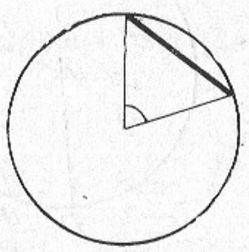
Kesknurgaks nimetatakse nurka, mille tipp asetseb ringi keskpunktis (joon. 9.108).

Kui ringjoone kaks kaart on kongruentsed, s. t. kui neid saab ühitada liikumise teel, siis neil on võrdsed suurused. Vastupidi, kui ringjoone kahel kaarel on võrdsed suurused, siis saab neid ühitada näiteks pöördega ümber ringjoone keskpunkti, s. t. nad on kongruentsed. Erinevate raadiustega ringjoonte kaarte vahel sellist seost ei ole.

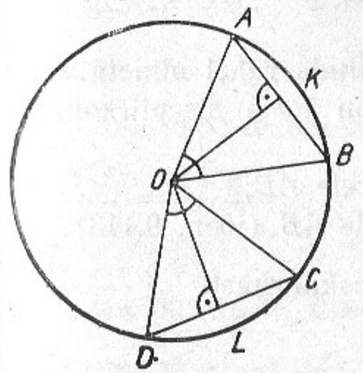
Loeme üksteisele vastavaiks 1) kõõlu, 2) selle otspunkte ühendava lühema kaare ja 3) kesknurga, mille haaradel paiknevate raadiuste otspunkte kõõl ja kaar ühendavad, olles nurga sisepiirkonnas (joon. 9.109).



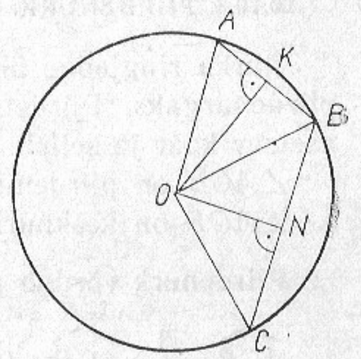
Joon. 9.108



Joon. 9.109



Joon. 9.110



Joon. 9.111

Kui ringjoone kaks kaart on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kõõlud ja kesknurgad (joon. 9.110).

Kui $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, siis $AB=CD$ ja $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$.

Kui ringjoone kaks kesknurka on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kõõlud ja kaared.

Kui ringjoone kaks kõõlu on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kesknurgad ja kaared.

Ringjoone kaks võrdset kõõlu on võrdsetel kaugustel ringjoone keskpunktist (joon. 9.110). Kui $AB=CD$, siis $OK=OL$.

Võrdsetele kõõludele vastavate kaarte ja kesknurkade mõõtarvud kraadides on võrdsed. $\overset{\frown}{AB}=\widehat{AOB}$.

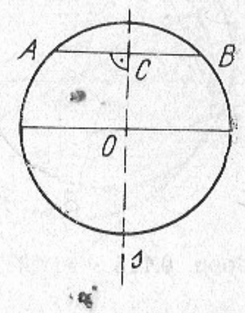
Ringjoone suuremale kõõlule vastab suurem kesknurk ja suurem kaar ning kõõl on lähemal ringjoone keskpunktile.

$BC>AB \Rightarrow \widehat{BOC}>\widehat{AOB}$, $\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AB}$ ja $ON<OK$ (joon. 9.111).

Kaarel on üks sümmeetriatelg, mille määrab vastava kõõlu keskristsirge. Joonisel 9.112 on sümmeetriateljeks sirge s:

$AC=CB$; $AB \perp s$.

Diameeter, mis on risti kõõluga, poolitab kõõlu.



Joon. 9.112

9.10.3. PIIRDENURK.

Nurka ringjoone ühise otspunktiga kõõlude vahel nimetatakse piirdenurgaks. Piirdenurgale vastavaks on tema sisepiirkonnas asetsev kaar ja sellele vastav kesknurk.

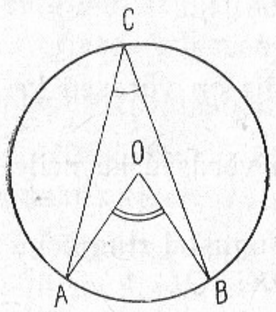
$\angle ACB$ on piirdenurk, mis vastab kaarele AB;
$\angle AOB$ on kesknurk, mis vastab kaarele AB (joon. 9.113).

Piirdenurk võrdub poolega vastavast kesknurgast.

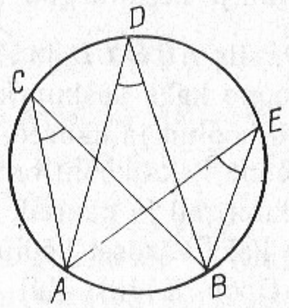
$\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\widehat{AOB}$ (joon. 9.113).

Piirdenurgad, millele vastab üks ja seesama kaar, on võrdsed.

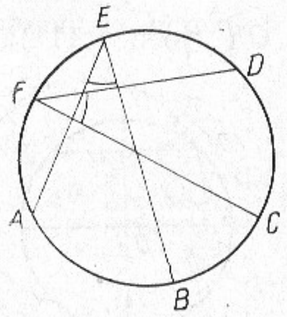
$\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=\widehat{AEB}$ (joon. 9.114).



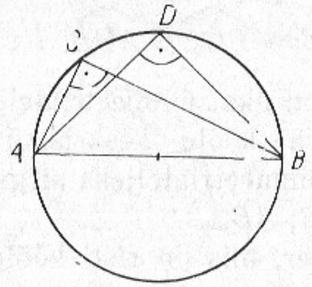
Joon. 9.113



Joon. 9.114



Joon. 9.115



Joon. 9.116

Piirdenurgad, mis vastavad võrdsetele kaartele, on võrdsed.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow\widehat{AEB}=\widehat{CFD}$ (joon. 9.115).

Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

$\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=90°$ (joon. 9.116).

9.10.4. SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

Sirge ja ringjoone ühisosa kas koosneb kahest punktist või ühest punktist või on tühi.

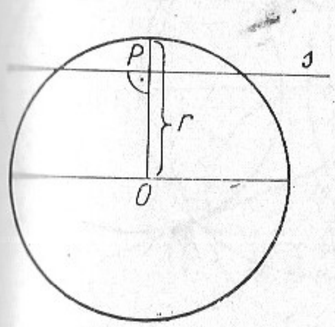
1. Sirge lõikab ringjoont (ühisosa koosneb kahest punktist). $OP<r$; $s\perp r$ (joon. 9.117).

2. Sirge puutub ringjoont (ühisosa koosneb ühest punktist). $OP=r$; $s\perp r$ (joon. 9.118).

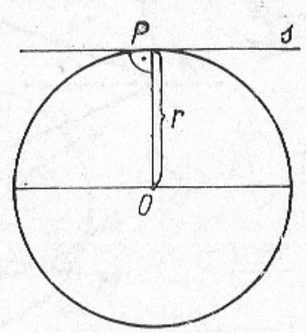
3. Sirge on väljaspool ringjoont (ühisosa on tühi). $OP>r$; $s\perp OP$ (joon. 9.119).

Kui ühisosa koosneb kahest punktist, on tegemist lõikamisega. Kui ühisosa koosneb ühest punktist, on tegemist puutumisega (joon. 9.117 ja 9.118).

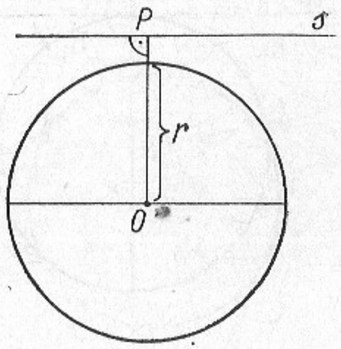
Ringjoone puutujaks nimetatakse sirget, millel on üks ja ainult üks ühine punkt ringjoonega. Ühine punkt on *puutepunkt*. Ringjoone puutuja on risti puutepunkti joonestatud raadiusega. Kui



Joon. 9.117



Joon. 9.118



Joon. 9.119

sirge s on puutuja, punkt P puutepunkt ja lõik OP puutepunkti joonestatud raadius, siis $s \perp r$ (joon. 9.118).

Sirge, mis läbib raadiuse otspunkti ringjoonel ja on raadiusega risti, on ringjoone puutuja.

Puutuja tunnus.

Sirge on ringjoone puutuja siis ja ainult siis, kui ta läbib raadiuse otspunkti ja on risti selle raadiusega.

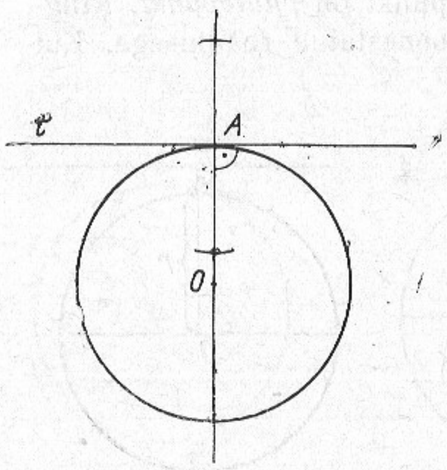
9.10.5. PUUTUJA KONSTRUEERIMINE.

Ülesanne 1. Konstrueerida ringjoonele puutuja läbi punkti, mis asub ringjoonel.

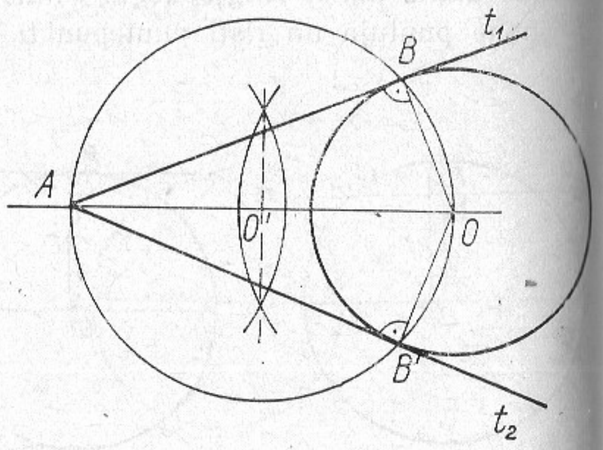
Lahendus. Ühendame antud punkti A ringjoone keskpunktiga O ja joonestame saadud lõigule AO ristsirge tema otspunktist A: $t \perp AO$ (joon. 9.120).

Ülesanne 2. Konstrueerida ringjoonele puutuja läbi punkti, mis asub väljaspool ringjoont.

Väljaspool ringjoont asuvast punktist saab joonestada ringjoonele kaks puutujat.



Joon. 9.120



Joon. 9.121

Lahendus. Ühendame antud punkti A ringjoone keskpunktiga O ja joonestame lõigule AO kui diameetrile ringjoone (joon. 9.121). Saadud ringjoon lõikab antud ringjoont punktides B ja B'. Joonestame läbi punkti A ja tekkinud punktide sirged t_1 ja t_2, mis ongi ringjoone puutujateks.

$t_1 \perp OB$ ja $t_2 \perp OB'$.

Ringjoone puutujate lõikepunkt on võrdsetel kaugustel puutepunktist.

$AB = AB'$ (joon. 9.121).

9.10.6. RINGJOONE PUUTUJA, LÕIKAJA JA NURGA VAHELINE SEOS.

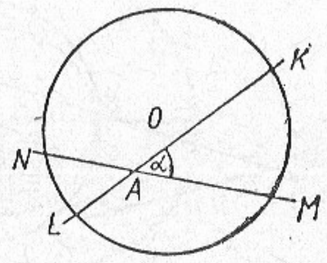
Ringjoone lõikajate vahelise nurga mõõtarv on võrdne selle nurga ja tema tippnurga haarade vahele jäävate kaarte mõõtarvude poolsummaga (joon. 9.122):

$$\widehat{KAM} = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{LN}).$$

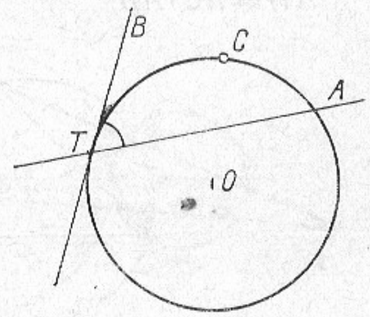
Ringjoone puutuja ja puutepunktist joonestatud lõikaja vahelise nurga mõõtarv on võrdne poolega lõikaja poolt eraldatud kaare mõõtarvust (joon. 9.123):

$$\widehat{ATB} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AT}.$$

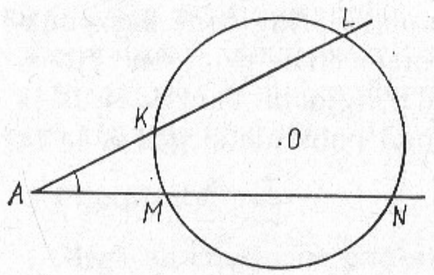
Väljaspool ringjoont asuvast punktist joonestatud ringjoone



Joon. 9.122



Joon. 9.123



Joon. 9.124

kahe lõikaja vahelise nurga mõõtarv on võrdne lõikajate vahele jäävate kaarte mõõtarvude poolvahega (joon. 9.124):

$$\widehat{KAM}=\frac{1}{2}\cdot(\overset{\frown}{LN}-\overset{\frown}{KM}).$$

9.10.7. VÕRDELISED LÕIGUD RINGIS.

Kaks lõikuvat kõõlu jaotuvad nii, et ühe kõõlu lõikude korrutis võrdub teise kõõlu lõikude korrutisega (joon. 9.122):

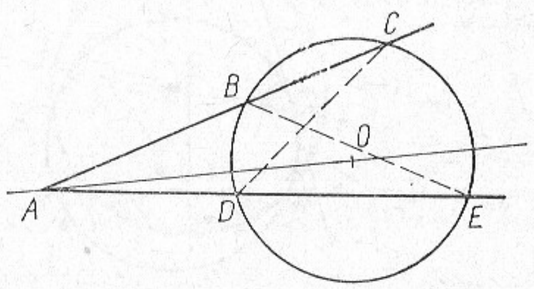
$$AM\cdot AN=AK\cdot AL \quad \text{ehk} \quad \frac{AM}{AK}=\frac{AL}{AN}.$$

Väljaspool ringjoont asuvast punktist joonestatud kaks lõikajat jaotuvad nii, et ühe lõikaja ja tema välisosa korrutis võrdub teise lõikaja ja tema välisosa korrutisega (joon. 9.125):

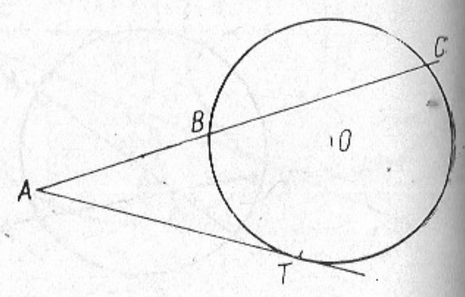
$$AC\cdot AB=AE\cdot AD.$$

Väljaspool ringjoont asuvast punktist joonestatud puutuja lõigu ruut võrdub samast punktist joonestatud lõikaja ja selle välisosa korrutisega. (joon. 9.126):

$$AT^2=AC\cdot AB.$$



Joon. 9.125



Joon. 9.126

9.10.8. KAHE RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

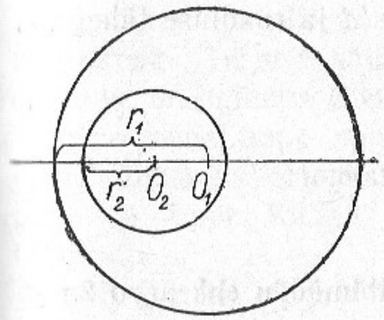
Kahe ringjoone ühisosa kas koosneb kahest punktist või ühest punktist või on tühi.

1. Ringjoonte ühisosa on tühi.

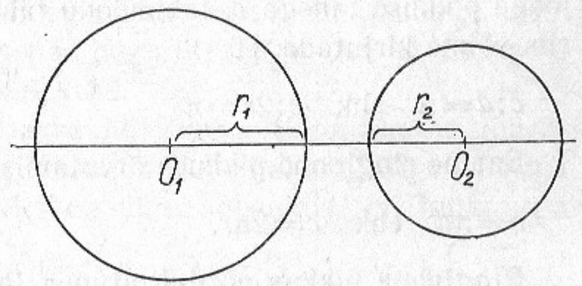
$O_1O_2<r_1-r_2$ — üks ringjoon asub teise sees (joon. 9.127).
$O_1O_2>r_1+r_2$ — üks ringjoon on väljaspool teist (joon. 9.128).

2. Ringjoonte ühisosa koosneb ühest punktist. Sel juhul on tegemist puutumisega.

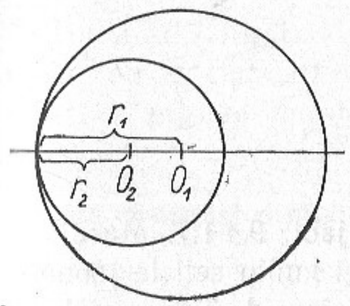
$O_1O_2=r_1-r_2$ — seesmine puutumine (joon. 9.129).
$O_1O_2=r_1+r_2$ — väline puutumine (joon. 9.130).



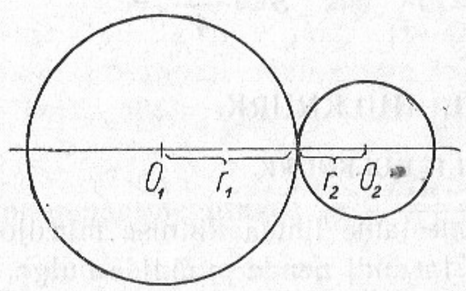
Joon. 9.127



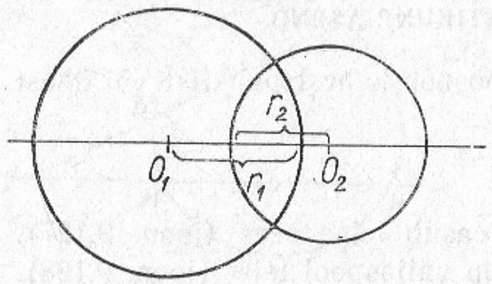
Joon. 9.128



Joon. 9.129



Joon. 9.130



Joon. 9.131

3. Ringjoonte ühisosa koosneb kahest punktist. Sel juhul on tegemist lõikumisega.

$O_1O_2<r_1+r_2$; $O_1O_2>r_1-r_2$ (joon. 9.131).

9.10.9. RINGJOONE PIKKUS JA RINGI PINDALA.

Ringjoone pikkuse ja läbimõõdu jagatis on muutumatu. Seda suhet tähistatakse kreeka tähega π (pii). $\pi=3{,}141592\ldots\approx3{,}14$.

Ringjoone pikkus on võrdeline läbimõõduga. Tähistame ringjoone pikkuse tähega c, läbimõõdu tähega d ja raadiuse tähega r, siis võime kirjutada, et

$c:d=\pi$ ehk $c:2r=\pi$.

Saame ringjoone pikkuse arvutamise valemi

$c=\pi d$ ehk $c=2\pi r$.

Ringjoone pikkus võrdub arvu π ja läbimõõdu ehk arvu 2π ja raadiuse korrutisega.

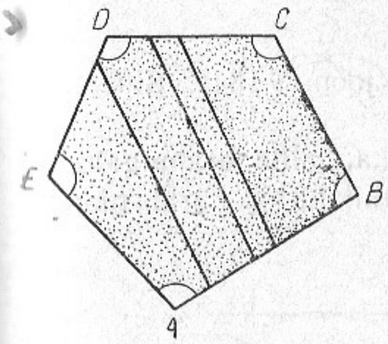
Ringi pindala avaldub valemiga

$$S=\pi r^2 \quad \text{ehk} \quad S=\frac{\pi d^2}{4}.$$

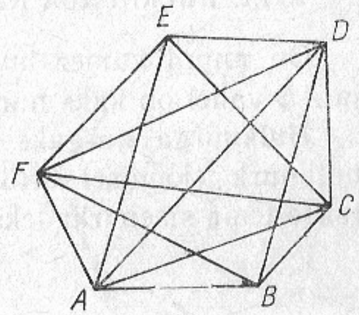
9.11. HULKNURK.

9.11.1. HULKNURK.

Joonestame lihtsa kinnise murdjoone (jaot. 9.4.1.). Murdjoon jaotab tasandi nende punktide hulga, mis ei kuulu sellele joonele, kaheks osahulgaks. Üks osahulk sisaldab sirgeid. Teine osahulk sisaldab küll lõike, mitte aga sirgeid (joon. 9.132). Punkteeritud



Joon. 9.132



Joon. 9.133

osahulk ei sisalda sirgeid. Selle punktihulga kohta ütleme, et murdjoon piirab teda.

Lihtsa kinnise murdjoone ja sellega piiratud tasandiosa ühendit nimetatakse hulknurgaks.

Murdjoonega piiratud tasandiosa nimetatakse hulknurga sisepiirkonnaks. Tasandi kõigi nende punktide hulka, mis hulknurgale ei kuulu, on hulknurga välispiirkond.

Murdjoone tippe nimetatakse hulknurga tippudeks ja murdjoone lülisid hulknurga külgedeks. Hulknurgal on külgi niisama palju kui tippe. Küljed, millel on ühine otspunkt, on hulknurga lähisküljed.

Lõiku, mille otspunktideks on hulknurga mitte ühele küljele kuuluvad tipud, nimetatakse *hulknurga diagonaaliks*.

Hulknurka, mis sisaldab iga oma diagonaali, nimetatakse kumeraks.

Hulknurki liigitatakse nende tippude arvu järgi. Hulknurka, millel on n tippu, nimetatakse n-nurgaks. Hulknurga tähiseks võetakse piirava murdjoone tähis, milles esimest tähte lõpus ei korrata.

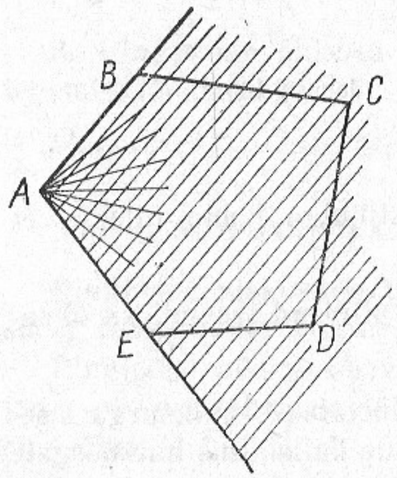
Iga n-nurkse hulknurga diagonaalide üldarv on $\frac{n(n-3)}{2}$.

Läbi ühe tipu saame joonestada $n-3$ diagonaali (joon. 9.133).

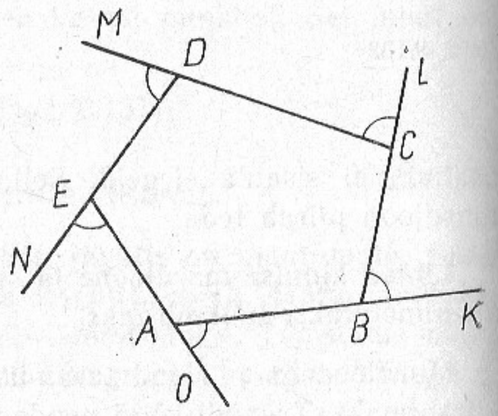
9.11.2. HULKNURGA NURGAD.

On antud kumer hulknurk $ABCDE$ (joon. 9.134). Kiirte AB ja AE vahel on kaks nurka.

Hulknurga nurgaks nimetatakse nurka, mille osahulgaks on hulknurk (joonisel 9.134 viirutatud). Hulknurga nurki nimetatakse tema sisenurkadeks.



Joon. 9.134



Joon. 9.135

Iga n-nurga nurkade summa on $(n-2)\cdot 180°$.

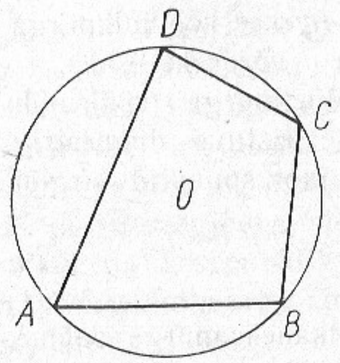
Hulknurga sisenurga kõrvunurka nimetatakse hulknurga välisnurgaks (joon. 9.135).

Hulknurga välisnurkade summa on 360°.

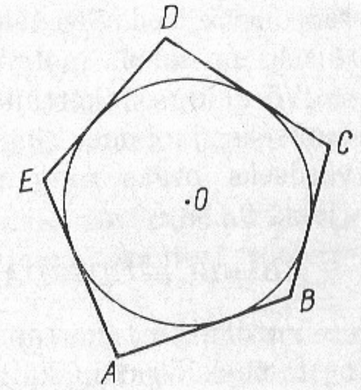
9.11.3. KÕÕLHULKNURK JA PUUTUJAHULKNURK.

Hulknurka, mille kõik tipud on ringjoonel, nimetatakse kõõlhulknurgaks.

Ringjoont, mis läbib hulknurga kõiki tippe, nimetatakse hulknurga ümber joonestatud ringjooneks ehk *ümberringjooneks* (joon. 9.136). Kui nelinurga ümber saab joonestada ringjoone, siis nelinurga vastasnurkade suuruste summa on sirgnurk.



Joon. 9.136



Joon. 9.137

Kui nelinurga vastasnurkade suuruste summa on sirgnurk, siis nelinurga ümber saab joonestada ringjoone.

Toodud laused võime võtta kokku.

Nelinurga ümber saab joonestada ringjoone siis ja ainult siis, kui nelinurga vastasnurkade suuruste summa on sirgnurk.

Rööpkülikute hulgast saab ainult ristküliku ümber joonestada ringjoone.

Trapetsi ümber saab joonestada ringjoone ainult siis, kui trapets on võrdhaarne.

Hulknurka, mille kõik küljed on ringjoone puutujatel, nimetatakse puutujahulknurgaks. Ringjoont, mis puutub hulknurga kõiki külgi, nimetatakse hulknurga sisse joonestatud ringjooneks ehk *siseringjooneks* (joon. 9.137).

Puutujanelinurga vastaskülgede summad on võrdsed.

9.11.4. VÕRDKÜLGNE KÕÕLHULKNURK.

Kõõlhulknurga saame, kui ringjoonel valitud teatud arvu punkte ühendame järjestikku kõõludega. Kui valime punktid nii, et kõõlud on võrdsed, siis tekib *võrdkülgne kõõlhulknurk*.

Võrdkülgse kõõlhulknurga külgedele vastavad kesknurgad on võrdsed. Ühe nurga leidmiseks jagame täispöörde külgede arvuga. Kui külgi on n, siis kesknurk on $360° : n$.

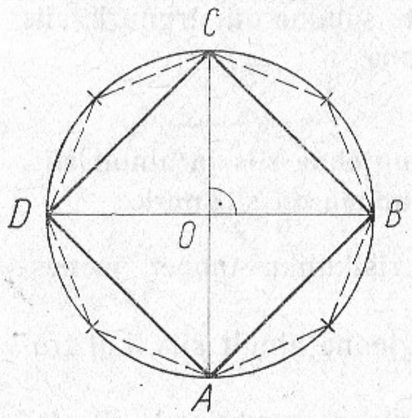
Võrdkülgse kõõlhuknurga külgedele vastavad ringjoone kaa-

red on võrdsed. See tähenab, et n-nurkse kõõlhulknurga joonestamiseks on tarvis jaotada ringjoon n võrdseks osaks.

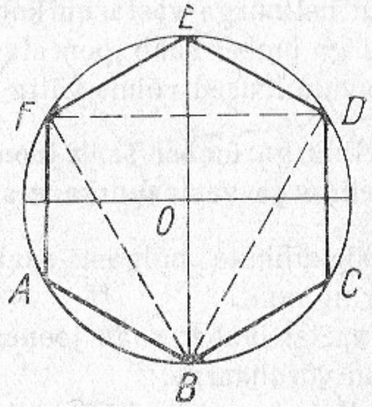
Võrdkülgse (korrapärase) kõõlnelinurga (kõõlruudu) joonestamiseks jaotame ringjoone kahe ristuva diameetriga neljaks võrdseks osaks ning ühendame jaotuspunktid sirglõikude abil (joon. 9.138).

$AB=BC=CD=DA$.

Võrdkülgse (korrapärase) kõõlkaheksanurga saame, kui joonestame kõõlruudu külgede keskristsirged, mis poolitavad vastavad kaared, ning ühendame saadud kaarte poolituspunktid ruudu tippudega.



Joon. 9.138



Joon. 9.139

Võrdkülgse (korrapärase) kõõlkuusnurga joonestamiseks jaotatakse ringjoon raadiusega kuueks võrdseks osaks ning ühendatakse järjestikused jaotuspunktid sirglõikudega (joon. 9.139).

Võrdkülgse (korrapärase) kõõlkolmnurga saame, kui saadud jaotuspunktid ühendame sirglõikudega üle ühe.

9.11.5. KORRAPÄRANE HULKNURK.

Hulknurka, millel on võrdsed küljed ja võrdsed nurgad, nimetatakse korrapäraseks hulknurgaks.

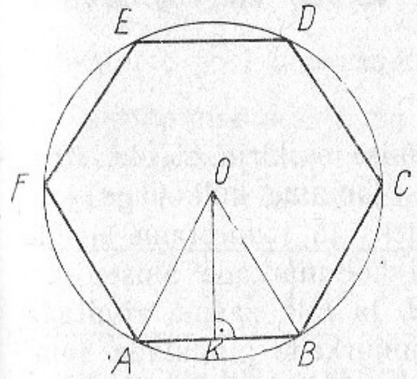
Iga võrdkülgne kõõlhulknurk on korrapärane hulknurk. Iga korrapärase hulknurga ümber saab joonestada ringjoone.

Korrapärase hulknurga küljed on ümberringjoone võrdsed kõõlud. Külgede keskpunktid on võrdsetel kaugustel ümberringjoone keskpunktist. Läbi korrapärase hulknurga külgede keskpunktide saame joonestada ringjoone. Seda ringjoont nimetatakse korrapärase hulknurga siseringjooneks.

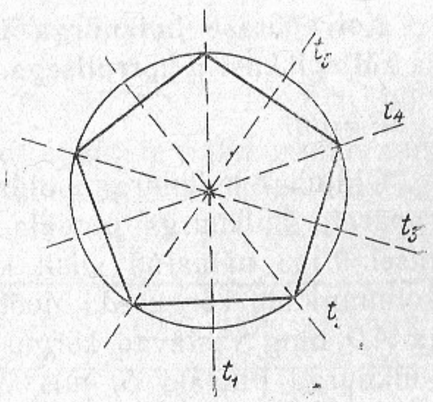
Ümber- ja siseringjoone ühist keskpunkti nimetatakse korrapärase hulknurga keskpunktiks. **Siseringjoone raadiust nimetatakse korrapärase hulknurga apoteemiks.**

Joonisel 9.140 kujutatud korrapärase kuusnurga apoteem on lõik OK. Nagu iga hulknurga, nii on ka **korrapärase hulknurga sisenurkade summa** $(n-2)\cdot 180°$, kus n on nurkade arv.

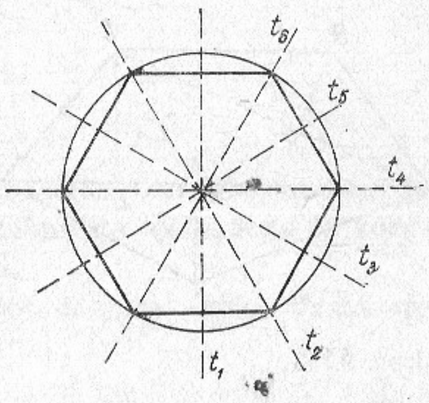
Korrapärase hulknurga iga sisenurk on $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.



Joon. 9.140



Joon. 9.141



Joon. 9.142

Korrapärase hulknurga välisnurgad on võrdsed. Iga välisnurk on $360°:n$.

Korrapärasel hulknurgal on n sümmeetriatelge, kus n on hulknurga tippude arv. Näiteks korrapärasel viisnurgal on 5 sümmeetriatelge (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 joonisel 9.141), korrapärasel kuusnurgal on 6 sümmeetriatelge (t_1, ..., t_6 joonisel 9.142).

9.11.6. HULKNURGA ÜMBERMÕÕT JA PINDALA.

Hulknurka piirava kinnise murdjoone pikkust nimetatakse vastava hulknurga ümbermõõduks.

Joonisel 9.132 kujutatud viisnurga ümbermõõt

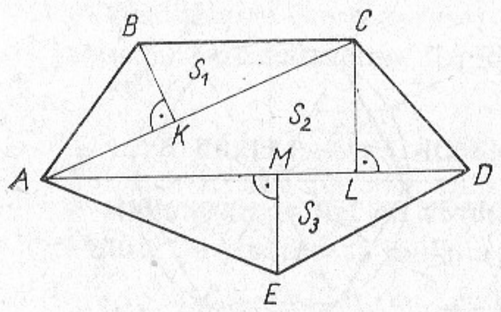
$$P=AB+BC+CD+DE+EA.$$

Korrapärase hulknurga ümbermõõt võrdub külgede arvu n ja küljepikkuse a korrutisega.

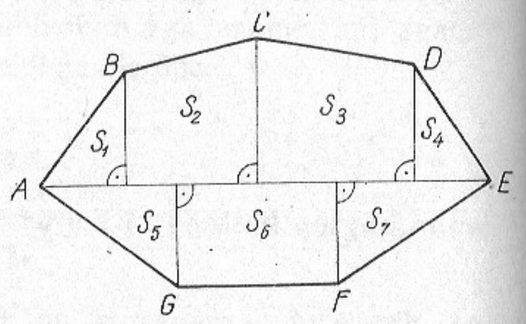
$$P=an.$$

Üldjuhul hulknurga pindala arvutamise eeskirja ei ole. Korrapäratu hulknurga pindala leidmiseks jaotame hulknurga joonisel 9.143 näidatud viisil kolmnurkadeks ja joonestame nende kolmnurkade kõrgused. Mõõtes saadud kolmnurkade alused AC ja AD ning vastavad kõrgused BK, CL ja EM, saame arvutada hulknurga pindala S, mis võrdub kolmnurkade pindalade summaga:

$$S=S_1+S_2+S_3.$$



Joon. 9.143



Joon. 9.144

Hulknurga võime jaotada ka joonisel 9.144 näidatud viisil täisnurkseteks kolmnurkadeks ja täisnurkseteks trapetsiteks. Mõõdame nende pindalade arvutamiseks vajalike lõikude pikkused ja arvutame jaotamisel tekkinud kujundite pindalad. Hulknurga pindala S võrdub nende pindalade summaga:

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7.$$

Korrapärase hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega.

Olgu korrapärase hulknurga külg a, külgede arv n ja apoteem r, siis tema pindala saame arvutada valemiga

$$S=n\cdot\frac{ar}{2}.$$

Et korrapärase hulknurga ümbermõõt $P=na$, siis $S=\frac{1}{2}Pr$. Tähistame pool ümbermõõtu tähega p, siis $\frac{1}{2}P=p$, siis pindala arvutamise eeskiri on $S=pr$. Korrapäraste hulknurkade apoteemide ja külgede suhted on antud külgede arvu puhul võrdsed. Need suhted on koondatud tabelisse.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r:a$	0,289	0,5	0,688	0,866	1,04	1,21	1,37	1,54	1,70	1,87

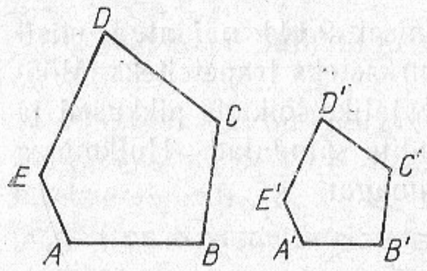
Kasutades seda tabelit, saame arvutada

1) apoteemi, kui külg on teada,
2) külje, kui apoteem on teada.

9.11.7. HULKNURKADE SARNASUS.

Kaht hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega (joon. 9.145):



Joon. 9.145

$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \Rightarrow \frac{AB+BC+\ldots}{A'B'+B'C'+\ldots}=\frac{AB}{A'B'}=\ldots .$$

Kahe sarnase hulknurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede ruutude suhtega:

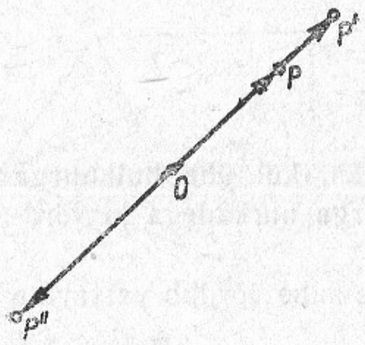
$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \Rightarrow \frac{S_{ABCDE}}{S_{A'B'C'D'E'}}=\frac{(AB)^2}{(A'B')^2}=\ldots .$$

9.12. HOMOTEETSUSTEISENDUS.

9.12.1. HOMOTEETSUSE MÕISTE.

Homoteetsuseks keskpunktiga O ja teguriga k nimetatakse teisendust, mis on määratud võrdusega $\overrightarrow{OP'}=k\cdot\overrightarrow{OP}$, kus O on antud punkt, $k\neq 0$ on antud arv, P on antud kujundi suvaline punkt ja P' on teisendatud kujundi vastav punkt.

Kui tegur k on positiivne ($k>0$), siis homoteetsuskeskpunktist kujundi suvalisse punkti viiv vektor ja teisendatud kujundi vastavasse punkti viiv vektor on samasuunalised.



Joon. 9.146

Kui tegur k on negatiivne ($k<0$), siis homoteetsuskeskpunktist kujundi suvalisse punkti viiv vektor ja teisendatud kujundi vastavasse punkti viiv vektor on vastassuunalised.

Teguri (k) absoluutväärtus ($|k|$) on võrdne teisendatud kujundi mingisse punkti viiva vektori ja antud kujundi vastavasse punkti viiva vektori pikkuste suhtega. Selgitame seda joonisel 9.146. Kui $k>0$, siis $OP\uparrow\uparrow OP'$ ja $|k|=\dfrac{|OP'|}{|\overrightarrow{OP}|}$. Kui $k<0$, siis $OP\uparrow\downarrow OP''$ ja $|k|=\dfrac{|\overrightarrow{OP''}|}{|\overrightarrow{OP}|}$.

Teisendatud kujundit nimetatakse antud kujundiga punkti O suhtes homoteetseks kujundiks.

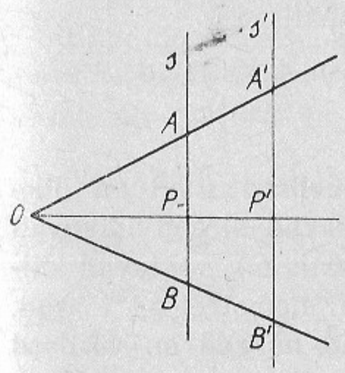
9.12.2. HOMOTEETSETE KUJUNDITE OMADUSI.

Sirgega homoteetseks kujundiks on selle sirgega samasihiline sirge. Sirge s' on homoteetne sirgega s punkti O suhtes: $s'\|s$ (joon. 9.147).

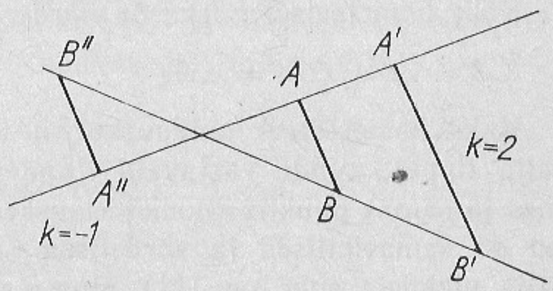
Kaks homoteetset lõiku on samasihilised ja nende pikkuste suhe võrdub homoteetsusteguri absoluutväärtusega (joon. 9.148).

$A'B'\|AB$; $\dfrac{A'B'}{AB}=|2|=2$;

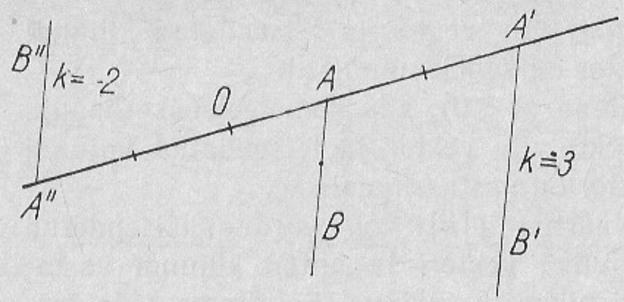
$A''B''\|AB$; $\dfrac{A''B''}{AB}=|-1|=1$.



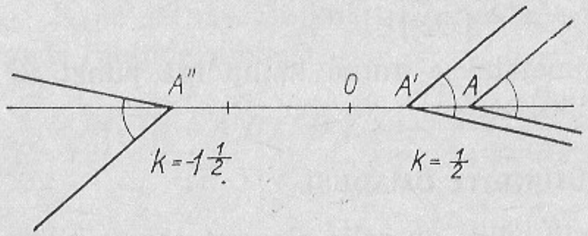
Joon. 9.147



Joon. 9.148



Joon. 9.149



Joon. 9.150

Kaks homoteetset kiirt on samasihilised, kusjuures need kiired on samasuunalised, kui $k>0$ ja vastassuunalised, kui $k<0$ (joon. 9.149):

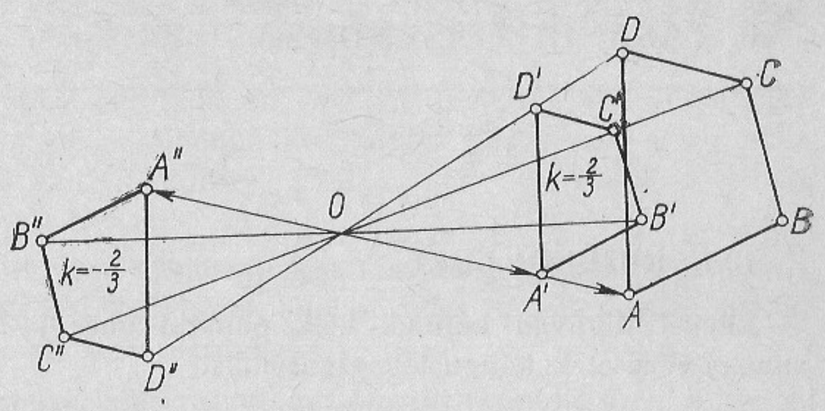
$k=3$, $[A'B')$ ja $[AB)$ on samasuunalised;

$k=-2$, $[A''B'')$ ja $[AB)$ on vastandsuunalised.

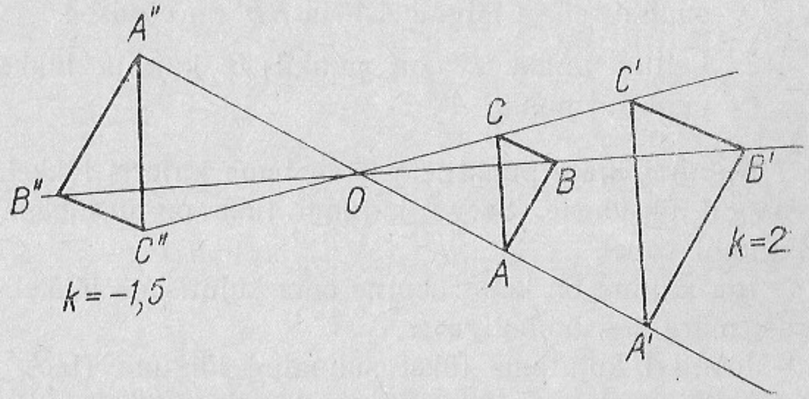
Kaks homoteetset nurka on võrdsed (joon. 9.150):

$\angle A'=\angle A$; $\angle A''=\angle A$.

Kaks homoteetset hulknurka on ühenimelised (neil on ühepalju tippe), **nende vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis** (homoteetsuskeskpunktis O), **vastavad küljed on samasihilised ja võrdelised** (paariti homoteetsed lõigud, mille pikkuste suhe on $|k|$) **ning vastavad nurgad on võrdsed** (paariti homoteetsed nurgad) (joon. 9.151).



Joon. 9.151



Joon. 9.152

Kahe homoteetse kolmnurga vastavad küljed on samasihilised ja võrdelised ning vastavad nurgad on võrdsed (joon. 9.152). Järelikult $\triangle A'B'C'$ ja $\triangle ABC$ homoteetsus tähendab, et

1) vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad punktis O;

2) $A'B'\parallel AB$; $B'C'\parallel BC$; $A'C'\parallel AC$;

3) $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=k=2$ ja

4) $\angle A'=\angle A$; $\angle B'=\angle B$; $\angle C'=\angle C$.

10. TASANDI TEISENDUS.

10.1. KUJUNDI LÜKE.

Lükkel liiguvad kujundi kõik punktid ühes ja sellessamas suunas võrdsetele kaugustele algasendist.

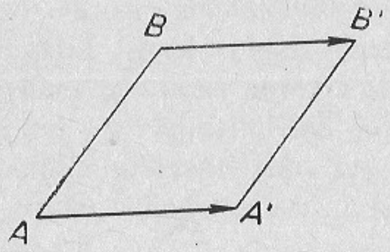
Kui on teada mingi punkti A kujutis A', siis saab leida iga punkti B kujutise järgmise eeskirja abil (joon. 10.1).

1. Joonestame lõigu AA'.
2. Joonestame lõigu BB' nii, et kiired AA' ja BB' on samasuunalised ja lõigud AA' ja BB' on võrdsed.
3. Leitud punkt B' on punkti B kujutis lükkel, mis viib punkti A punkti A'.

Kujundi igale punktile vastab tema kujutis lükkel. See vastavus on üksühene. Seega kujundi lüke on üksühene seos kahe kujundi vahel.

Iga kujund on kongruentne oma kujutisega lükkel. Kongruentsust märgime sümboliga $\cong$.

Joonisel kujutame lüket suunatud lõiguna (jaot. 8.1.). Vaatleme lõike $\overrightarrow{AA'}$ ja $\overrightarrow{BB'}$, mis näitavad punktide A ja B lüket. Lõik $A'B'$ on lõigu AB kujutis sellel lükkel (joon. 10.1.). Järelikult $AB=A'B'$ ja $[AB]\parallel[A'B']$. Et $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A'B'}$, siis $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. Seega kehtib seos: kui $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, siis ka $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.



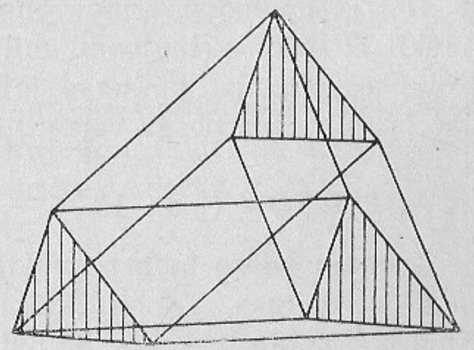
Joon. 10.1

10.2. TASANDI LÜKE.

Lükke võime sooritada nii üksikute punktide kui ka kujunditega. Kui on teada ühe punkti kujutis lükkel, siis saab leida tasandi iga punkti kujutise sellel lükkel, s. t. võime sooritada tasandi lükke.

Tasandi lüke on üksühene seos tasandi kõigi punktide hulgas. Lükkel liiguvad tasandi kõik punktid ühes ja sellessamas suunas võrdsetele kaugustele algasendist.

Lüke muudab küll iga kujundi asendit tasandil, kuid ei muuda tema kuju ega mõõtmeid. Seepärast on iga kujund tasandil kongruentne oma kujutisega tasandi lükkel.



Joon. 10.2

Tasandi lükke nooldiagrammiks on kõigi üksteisega võrdsete samasuunaliste lõikude hulk tasandil (joon. 8.2).

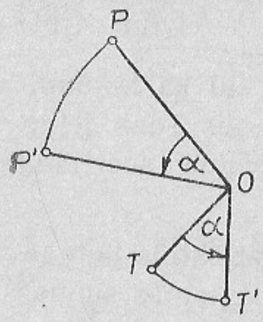
Tasandi lükke nooldiagrammi nimetatakse vektoriks tasandil.

Lüke kui vastavuse eeskiri on täielikult teada, kui on antud vektori üks esindaja. Kõne lihtsustamiseks nimetame vektori esindajat — suunatud lõiku — lihtsalt vektoriks.

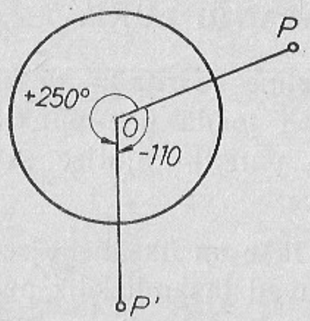
Kui sooritada järjestikku kaks tasandi lüket, siis tulemuseks on jälle tasandi lüke (joon. 10.2).

10.3. TASANDI PÖÖRE ÜMBER PUNKTI.

Punkti, mille ümber toimub punkti, kujundi või tasandi pööre, nimetatakse *pöörde keskpunktiks.* Pöördel jääb keskpunkt paigale, s. t. ta on iseenda kujutis.



Joon. 10.3



Joon. 10.4

Nurka keskpunktist lähtuva kiire ja selle kujutise vahel nimetatakse *pöördenurgaks*.

Iga keskpunktist erinev punkt P liigub pöördel ümber keskpunkti O mööda ringjoont, mille raadius on $[OP]$ (joon. 10.3). Kõik keskpunktist lähtuvad kiired pöörduvad ümber keskpunkti ühe ja sellesama nurga võrra; näiteks

$\widehat{POP'} = \widehat{TOT'}$ (joon. 10.3).

Tasandi pööre ümber punkti on üksühene seos tasandi kõigi punktide hulgas. Ta on tasandi liikumine, mis erineb lükkest. Kuid pöördel ja lükkel on ka ühiseid omadusi:

1) säilib kaugus iga kahe punkti vahel;
2) iga kujund on kongruentne oma kujutisega.

Olgu pöörde keskpunkt O ja pöördenurk α (joon. 10.3). Punkti P kujutise leidmiseks:

1) joonestame ümber punkti O ringjoone kaare raadiusega $[OP]$;
2) joonestame kiire OP ja selle kujutise, s. t. kiire, mis moodustab kiirega nurga α.

Ringjoone kaare ja kiire OP kujutise lõikepunkt P' ongi punkti P kujutis P'.

Tasandil on võimalikud kaks teineteisele vastupidist pöörlemissuunda. Pöörlemissuundade eristamiseks on kasutusele võetud positiivse ja negatiivse pöördenurga mõiste. *Pöördenurk on positiivne* ($\alpha > 0$), kui pööre on vastupidine kellaosuti pöörlemissuunale. *Pöördenurk on negatiivne* ($\alpha < 0$), kui pööre on kellaosutite liikumise suunas (joon. 10.4).

10.4. TASANDI PEEGELDUS PUNKTIST.

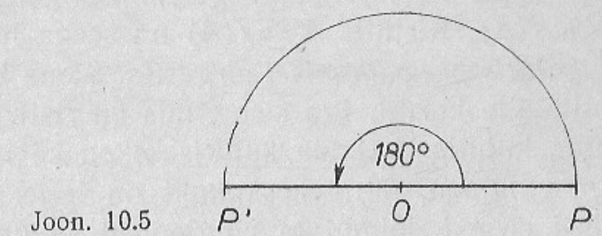
Tasandi pöördel 180° võrra ümber punkti O saame antud punkti P kujutiseks punkti P', mis on sümmeetriline punktiga P pöörde keskpunkti O suhtes (joon. 10.5). Punkt P' on punkti P peegeldus punktist O. Nii on see iga tasandi punkti korral, s. t. **tasandi pööre 180° võrra ümber punkti O on peegeldus punktist O.**

Tasandi peegeldus punktist on tasandi liikumine.

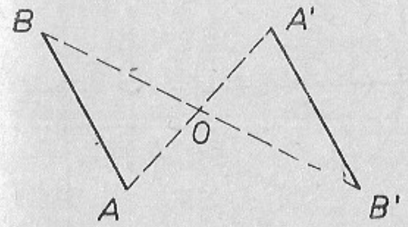
Tasandi peegeldus säilitab tasandi iga kahe punkti vahelise kauguse. Iga kujund on kongruentne oma kujutisega peegeldamisel punktist (joon. 10.6, 10.7).

Punkti, millest tasandit peegeldatakse, nimetatakse peegelduskeskpunktiks. Iga lõik, iga ringjoon ja iga ring, mille keskpunktiks on peegelduse keskpunkt O, peegeldub iseendaks, s. t. on sümmeetriline punkti O suhtes.

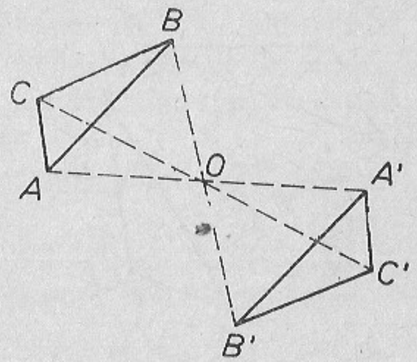
Punkti, mille suhtes kujund on sümmeetriline, nimetatakse kujundi sümmeetriakeskpunktiks. Kujundit, millel on sümmeetriakeskpunkt, nimetatakse tsentraalsümmeetriliseks.



Joon. 10.5



Joon. 10.6



Joon. 10.7

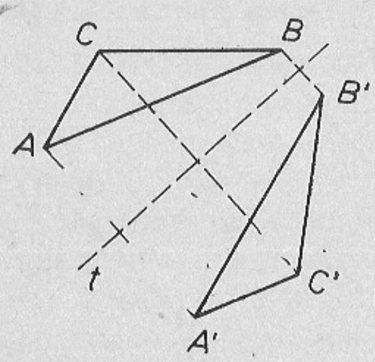
Punkti P kujutist peegeldamisel punktist O tähistame sümboliga $O(P)$. Kirjutist $P'=O(P)$ loetakse järgmiselt: *punkt P' on punkti P kujutis peegeldamisel punktist O* või *punkt P' on sümmeetriline punktiga P punkti O suhtes*. Seda kirjaviisi kasutame ka kujundite puhul.

10.5. TASANDI PEEGELDUS SIRGEST.

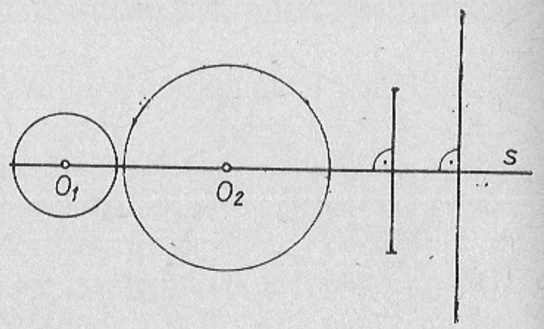
Sirgest võime peegeldada nii punkti kui ka kujundit. Peegeldada saame ka kogu tasandit igast sirgest tasandil. Peegeldus sirgest on üksühene seos tasandi punktide hulgas.

Tasandi peegeldus sirgest on tasandi pööre ruumis, nimelt pööre 180° võrra ümber peegeldustelje. Joonise kokkumurdmisel mööda peegeldustelge kasutamegi sellist pööret. Tasandi peegeldus sirgest on tasandi liikumine. Tasandi peegeldamisel sirgest säilib kaugus iga kahe punkti vahel. Iga kujund tasandil on kongruentne oma kujutisega tasandi peegeldamisel sirgest (joon. 10.8).

Punkti A kujutist peegeldamisel sirgest s tähistame sümboliga $s(A)$. Kirjutis $A'=s(A)$ on seega lause: *punkt A' on punkti A kujutis peegeldamisel sirgest s*. Sama tähistus kehtib ka muude kujundite korral. Iga sirge, mis on risti peegeldusteljega, on iseenda kujutis. Iseenda kujutiseks on ka iga teljega ristuv lõik ja iga ringjoon, mille keskpunkt on teljel (joon. 10.9). Seega on need sirged, lõigud ja ringjooned sümmeetrilised peegeldustelje suhtes.



Joon. 10.8

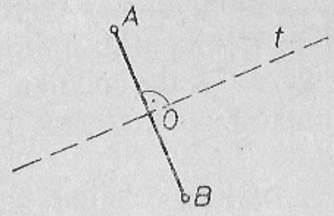


Joon. 10.9

Sirget, mille suhtes kujund on sümmeetriline, nimetatakse kujundi sümmeetriateljeks. Kujundit, millel on sümmeetriatelg, nimetatakse telgsümmeetriliseks.

Kui $B=s(A)$, siis $A=s(B)$, s. t. peegeldustelg s on punktipaari $(A; B)$ sümmeetriatelg. Telje s iga punkt on võrdsetel kaugustel punktidest A ja B. Telg s sisaldab tasandi kõiki punkte, millel on selline omadus:

$$s=\{X \mid AX=BX\}.$$



Joon. 10.10

Tasandi kõigi punktide hulk, mis on võrdsetel kaugustel punktidest A ja B, on punktipaari $(A; B)$ sümmeetriatelg (joon. 10.10).

10.6. TASANDI LIIKUMINE.

Tasandi liikumiseks nimetatakse tasandi teisendust, mis säilitab kauguse tasandi iga kahe punkti vahel.

Kaht kujundit nimetatakse kongruentseteks, kui üks neist on teise kujutis liikumisel. Kirjeldame tasandi liikumisi.

Tasandi lüke on tasandi liikumine, mida esitab vektor (jaot. 10.2.).

Tasandi pööre ümber punkti O on tasandi liikumine, mille puhul punkt O jääb paigale ja kõik nurgad punktist O lähtuvate kiirte ja nende kujutiste vahel on võrdsed. Seejuures tehakse vahet kahe pöörlemissuuna vahel, omistades pöördenurgale märgi (jaot. 10.3.).

Tasandi peegeldus punktist O on tasandi pööre 180° võrra ümber punkti O (jaot. 10.4.).

Tasandi peegeldus sirgest s on tasandi liikumine, mille puhul sirge s jääb paigale ja sirgega s äärnevad pooltasandid on teineteise kujutised (jaot. 10.5.).

Tasandi liikumine on täielikult määratud, kui on teada ühe kiire ja sellega äärneva pooltasandi kujutised.

11. RUUMILISED KUJUNDID, NENDE OMADUSED JA SEOSED.

11.1. HULKTAHUKAD.

Hulktahukaks nimetatakse keha, mille pind koosneb hulknurkadest. Hulknurki, millest koosneb keha pind, nimetatakse keha *tahkudeks*. Kahe lõikuva tahu ühisosaks olevat sirglõiku nimetatakse hulktahuka *servaks*. Servade ühiseid punkte nimetatakse *tippudeks*.

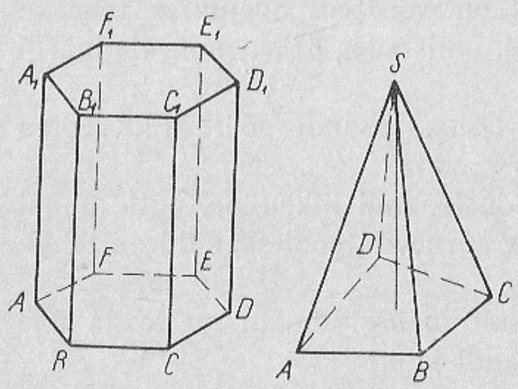
Paljudest hulktahukatest õpitakse koolis tundma ainult osa. Enamik neist kuulub püstprismade või püramiidide hulka.

Hulktahukate külgpind koosneb külgtahkudest, põhjadeks on põhitahud. Külgtahud lõikuvad mööda *külgservi*, külgtahud ja põhitahk mööda *põhiserva*.

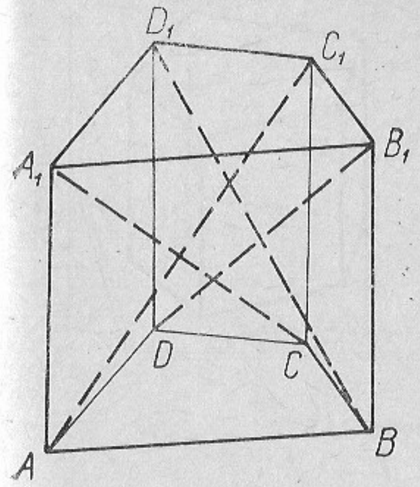
Vastavalt põhitahu tippude arvule nimetatakse hulktahukat kolmnurkseks, nelinurkseks, viisnurkseks jne.

Hulktahukatest kõnelemise hõlbustamiseks tähistatakse nende tipud tähtedega. Joonisel 11.1 on esitatud prisma $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, lühidalt $A \ldots F_1$ ja püramiid $SABCD$.

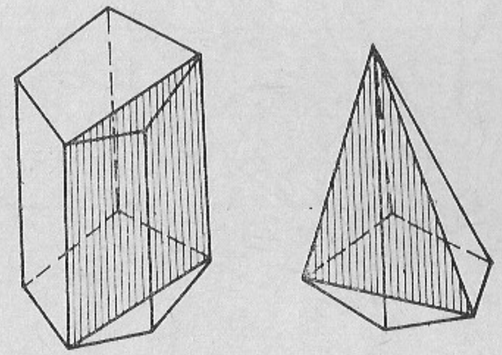
Kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu ühendavat sirglõiku



Joon. 11.1



Joon. 11.2



Joon. 11.3

nimetatakse selle hulktahuka *diagonaaliks*. Joonisel 11.2 on prisma $A \ldots D_1$ diagonaalideks AC_1, BD_1, CA_1 ja DB_1.

Prisma ja püramiidi kaks mitte ühele tahule kuuluvat külgserva määravad *diagonaallõike* (joon. 11.3).

11.2. PRISMA. PRISMA PINDALA JA RUUMALA.

Kaldprismaks nimetatakse keha, mis on piiratud kahe kongruentse paralleelsetele tasanditele kuuluva hulknurgaga ning nii mitme rööpkülikuga, kui mitu külge on ühel hulknurgal (joon. 11.4).

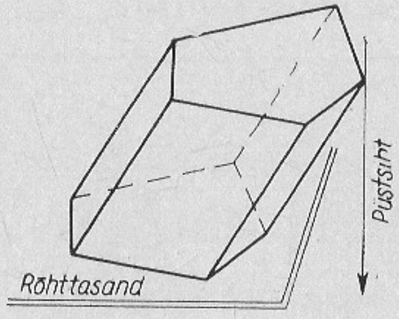
Paralleelseid hulknurki nimetatakse prisma põhjadeks ja rööpkülikuid külgtahkudeks. Paralleelsete hulknurkade külgi nimetatakse põhiservadeks. Kahe külgtahu ühist külge nimetatakse külgservaks. Kaldprisma külgservad on kaldu põhjadega.

Prisma diagonaaliks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab prisma kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu.

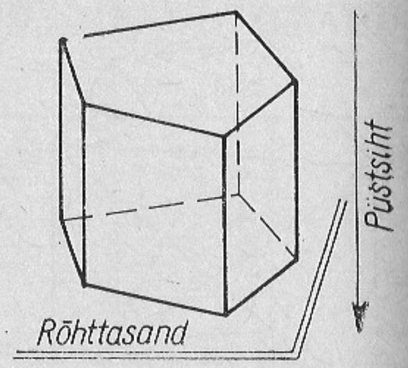
Prisma kõrguseks nimetatakse põhjadevahelist kaugust (ristlõigu pikkust).

Prismat nimetatakse tema põhja tippude arvu järgi kolmnurkseks, nelinurkseks, viisnurkseks jne.

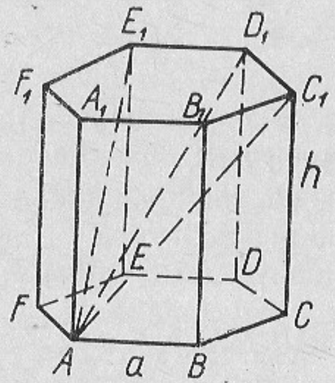
Püstprismaks nimetatakse keha, mis on piiratud kahe kongruentse paralleelse hulknurgaga ning nii mitme ristkülikuga, kui



Joon. 11.4



Joon. 11.5

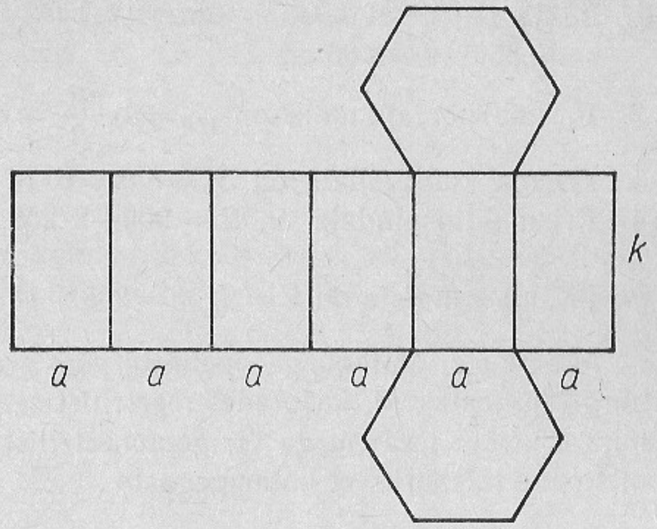


Joon. 11.6

mitu külge on ühel hulknurgal (joon. 11.5). Püstprisma külgservad on risti põhjadega.

Korrapäraseks prismaks nimetatakse püstprismat, mille põhjaks on korrapärane hulknurk (joon. 11.6).

Korrapärase prisma kõrguseks on külgserva pikkus.
AB, BC, CD, ... on prisma põhiservad,
$AB=BC=CD=\ldots=a$;
AA_1, BB_1, CC_1 ... on prisma külgservad,
$AA_1=BB_1=CC_1=\ldots=h$ on korrapärase prisma kõrgus;
AE_1, AD_1, AC_1 ... on prisma diagonaalid.
Korrapärase püstprisma pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.7.



Joon. 11.7

Prisma külgpindalaks nimetatakse prisma kõigi külgtahkude pindalade summat.

Korrapärase prisma külgpindala võrdub prisma põhja ümbermõõdu ja prisma kõrguse korrutisega.

$$S_k = P \cdot h.$$

Prisma täispindalaks nimetatakse kõigi tahkude pindalade summat.

Täispindala leidmiseks tuleb külgpindalale liita kahe põhja pindala.

$$S_t = S_k + 2S_p.$$

Korrapärase prisma ruumala võrdub prisma põhja pindala ja prisma kõrguse korrutisega.

$$V = S_p \cdot h.$$

N ä i d e.

Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma täispindala ja ruumala, kui ta põhiserv on 10 cm ja kõrgus 15 cm, eeldades, et andmed on ligikaudsed.

Antud: $a=10$ cm, $h=15$ cm.

Leida: S_t ja V.

1. Põhja apoteemi leiame suhtest $r:a=0{,}866$ (jaot. 9.11.5.). $r=0{,}866\cdot 10=8{,}66$ cm.
2. Prisma põhjapindala on $S_p=6\cdot\frac{ar}{2}=6\cdot\frac{10\cdot 8{,}66}{2}=259{,}8$ cm².
3. Prisma külgpindala on $S_k=6ah=6\cdot 10\cdot 15=900$ cm².
4. Prisma täispindala on $S_t=900+2\cdot 259{,}8=1419{,}6$ cm² $\approx$ ≈ 1400 cm².
5. Prisma ruumala on $V=S_p\cdot h=259{,}8\cdot 15=3897$ cm³ ≈ 3900 cm³.

M ä r k u s. Hulknurga apoteemi võib arvutada ka teades hulknurga küljepikkust, kasutades meetrilisi seoseid täisnurkses kolmnurgas või teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone täisnurksest kolmnurgast.

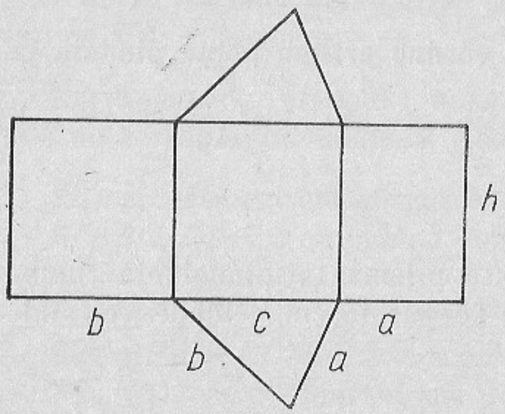
Kolmnurkse püstprisma pindala ja ruumala.

Kolmnurkse püstprisma pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.8. Põhja pindala $S_p=S_{ABC}$, põhja ümbermõõt $P=AB+BC+AC$ (joon. 11.9).

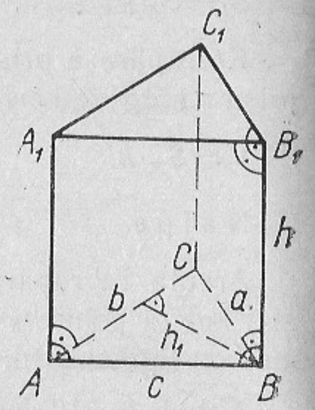
Kolmnurkse püstprisma külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja prisma kõrguse (külgserva) korrutisega.

$S_k=P\cdot h.$

Täispindala $S_t=2S_p+S_k.$



Joon. 11.8



Joon. 11.9

Kolmnurkse püstprisma ruumala võrdub põhja pindala ja prisma kõrguse korrutisega.

$V=S_p\cdot h.$

N ä i d e.

Püstprisma põhi on kolmnurk külgedega $AB=4{,}5$ cm, $BC=8{,}0$ cm ja $AC=9{,}0$ cm, põhja kõrgus küljele AC on $h_1=4{,}0$ cm ja prisma kõrgus $h=5{,}3$ cm. Arvuta prisma täispindala ja ruumala, eeldades, et andmed on ligikaudsed (joon. 11.9).

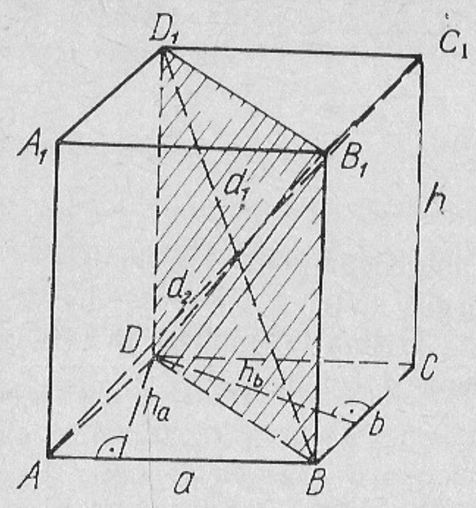
1) $S_p=\frac{AC\cdot h_1}{2}$; $S_p=\frac{9\cdot 4}{2}=18$ cm²;
2) $P=AB+BC+AC$; $P=4{,}5+8+9=21{,}5$ cm;
3) $S_k=P\cdot h$; $S_k=21{,}5\cdot 5{,}3=113{,}95\approx 110$ cm²;
4) $S_t=2S_p+S_k$; $S_t=2\cdot 18+110=146\approx 150$ cm²;
5) $V=S_p\cdot h$; $V=18\cdot 5{,}3=95{,}4\approx 95$ cm³.

V a s t u s. Prisma täispindala on ligikaudu 150 cm² ja ruumala 95 cm³.

11.3. PÜSTRÖÖPTAHUKAS. PÜSTRÖÖPTAHUKA PINDALA JA RUUMALA.

Rööpkülikukujulise põhjaga püstprismat nimetatakse püströöptahukaks (joon. 11.10).

Põhitahud $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ on rööpkülikud. Põhjaks oleva rööpküliku $ABCD$ küljele a joonestatud rööpküliku kõrgus on h_a ja küljele b joonestatud kõrgus h_b. Külgtahud AA_1B_1B; BB_1C_1C; CC_1D_1D ja AA_1D_1D on ristkülikud. Püströöptahuka lõikamisel kaheks osaks mööda põhjade diagonaale ja neid ühendavaid külgservi, saame kaks kongruentset kolmnurkset püstprismat. Saadud lõige BB_1D_1D on ristkülikukujuline ja sellel asuvad püströöptahuka diagonaalid d_1 ja d_2.



Joon. 11.10

Püströöptahuka omadusi.

1. Rööptahuka vastastahud on kongruentsed ja paralleelsed.
2. Rööptahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes punktis ja poolitavad selles.
3. Rööptahuka diagonaalid on paarikaupa võrdsed.

Püströöptahuka pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.11. Pinnalaotus koosneb ristkülikust ja kahest kongruentsest rööpkülikust. Ristkülik on külgtahkude ühend, tema pindala aga püströöptahuka külgpindala. Ristküliku üks külg on põhiservade summa — püströöptahuka põhja ümbermõõt.

$P=2a+2b.$

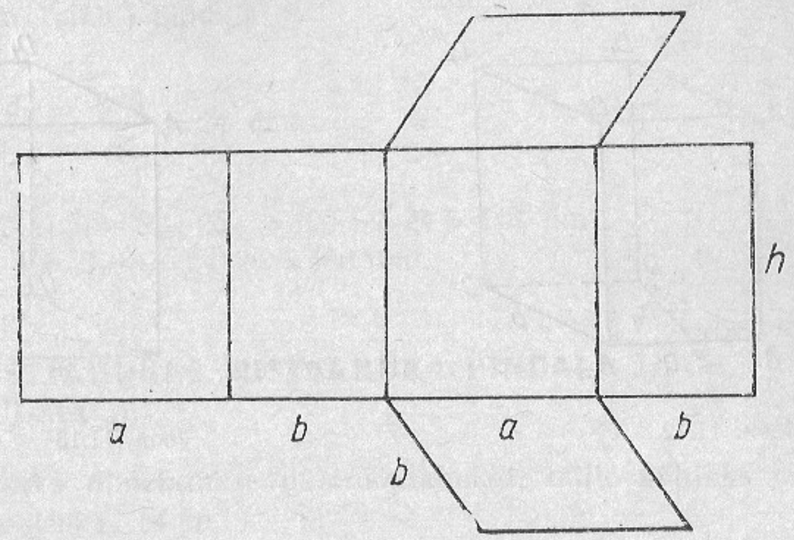
Ristküliku teine külg on püströöptahuka kõrgus h.

Püströöptahuka külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse (külgserva) korrutisega (joon. 11.11):

$S_k=P\cdot h$ ehk $S_k=2(a+b)\cdot h.$

Püströöptahuka täispindala võrdub külgpindala ja kahekordse põhja pindala summaga (joon. 11.10):

$S_t=S_k+2S_p$ ehk $S_t=2(a+b)\cdot h+2ah_a.$



Joon. 11.11

Püströöptahuka ruumala võrdub tema kõrguse ja põhja pindala korrutisega (joon. 11.10):

$V=S_p\cdot h$ ehk $V=2ah_a\cdot h.$

Näide. 1.

Arvutada püströöptahuka täispindala ja ruumala, kui põhiservad on 12 cm ja 8 cm ja nendest esimesele joonestatud rööpküliku kõrgus on 7 cm; püströöptahuka kõrgus on 15 cm (joon. 11.12).

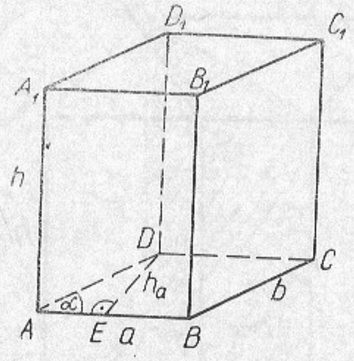
Antud: $a=12$ cm; $b=8$ cm; $h_a=7$ cm; $h=15$ cm.

Leida: S_t ja V.

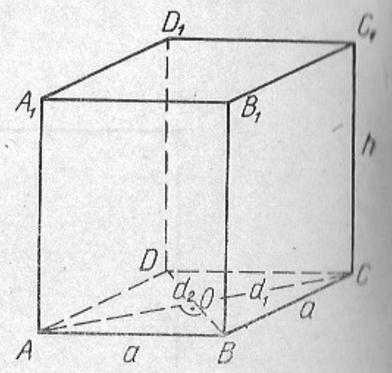
1. Püströöptahuka külgpindala $S_k=P\cdot h=2(a+b)\cdot h=$
$=2(12+8)\cdot 15=40\cdot 15=600$ cm².
2. Põhja pindala $S_p=a\cdot h_a=12\cdot 7=84$ cm².
3. Täispindala $S_t=S_k+2S_p=600+2\cdot 84=600+168=768$ cm².
4. Ruumala $V=S_p\cdot h=84\cdot 15=1260$ cm³.

Näide 2.

Püströöptahuka põhjaks on rööpkülik külgedega 2 dm ja 5 dm ning teravnurgaga 30°. Püströöptahuka külgserv on 10 dm. Arvuta täispindala ja ruumala (joon. 11.12).



Joon. 11.12



Joon. 11.13

Antud: $a=5$ dm; $b=2$ dm; $h=10$ dm; $\alpha=30°$.

Leida: S_t ja V.

1. Põhjaks oleva rööpküliku kõrguse leiame kolmnurgast ADE:
$\sin 30°=\frac{h_a}{AD}$; $h_a=AD\cdot\sin 30°=2\cdot\frac{1}{2}=1$ dm.
2. Püströöptahuka külgpindala $S_k=P\cdot h=2(a+b)\cdot h=$
$=2(5+2)\cdot 10=140$ dm².
3. Põhja pindala $S_p=a\cdot h_a=5\cdot 1=5$ dm².
4. Täispindala $S_t=S_k+2S_p=140+2\cdot 5=150$ dm².
5. Ruumala $V=S_p\cdot h=5\cdot 10=50$ dm³.

Näide 3.

Püströöptahuka põhjaks on romb diagonaalidega 6 dm ja 8 dm. Püströöptahuka kõrgus on 20 dm. Leida täispindala ja ruumala (joon. 11.13).

Antud: $d_1=6$ dm; $d_2=8$ dm; $h=20$ dm.

Leida: S_t ja V.

1. Põhjaks oleva rombi külje, s. o. püströöptahuka põhiserva, arvutame kolmnurgast AOB, kasutades Pythagorase teoreemi:
$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$; $a^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2=3^2+4^2=25$;
$a=5$ dm.
2. Külgpindala $S_k=4a\cdot h=4\cdot 5\cdot 20=400$ dm².

3. Põhja (kui rombi) pindala
$S_p=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 8}{\underset{1}{\cancel{2}}}=24$ dm².
4. Täispindala $S_t=S_k+2S_p=400+2\cdot 24=448$ dm².
5. Ruumala $V=S_p\cdot h=24\cdot 20=480$ dm³.

11.4. RISTTAHUKAS. RISTTAHUKA PINDALA JA RUUMALA.

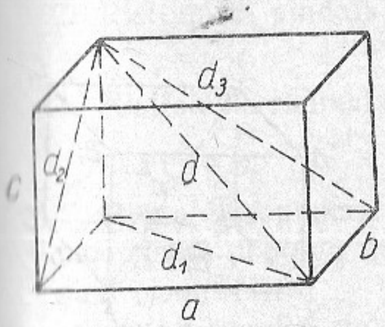
Risttahukaks nimetatakse püströöptahukat, mille põhjaks on ristkülik. Joonisel 11.14 on

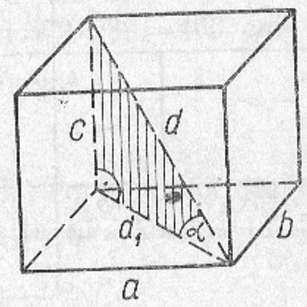
a risttahuka pikkus,	d risttahuka diagonaal,
b risttahuka laius,	d_1 põhja diagonaal,
c risttahuka kõrgus,	d_2 ja d_3 külgtahkude diagonaalid.

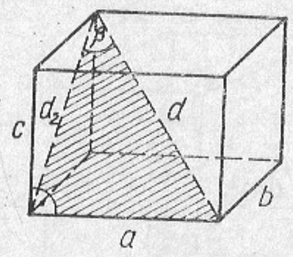
Joonisel 11.15 on α diagonaali ja põhitahu vaheline nurk ja joonistel 11.16, 11.17 β ja γ diagonaali ja külgtahu vahelised nurgad.

Risttahuka mõningaid omadusi.

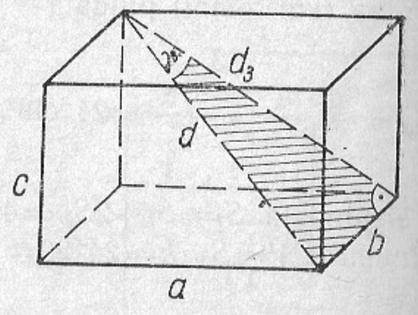
1. Risttahuka kõik diagonaalid on võrdsed.
2. Risttahuka diagonaali ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga (joon. 11.14):
$d^2=a^2+b^2+c^2$.







Joon. 11.16



Joon. 11.17

3. Risttahuka juures kehtivad püströöptahuka omadused 1. ja 2.

Risttahuka pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.18.

Risttahuka pindala arvutamiseks arvutame esmalt kolme erineva tahu pindalade summa ja korrutame tulemuse kahega (joon. 11.19).

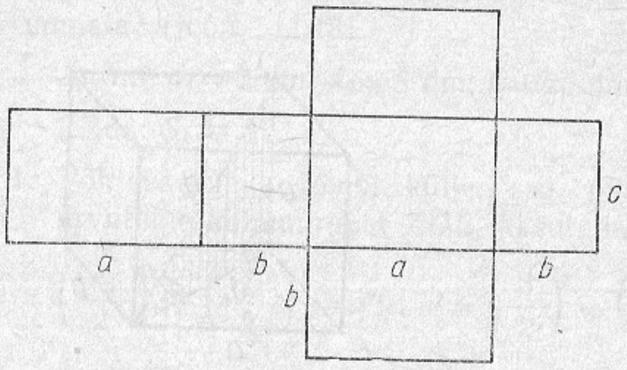
$S_t = 2(ab+bc+ac)$.

Risttahuka ruumala võrdub tema kolme mõõtme korrutisega (joon. 11.19):

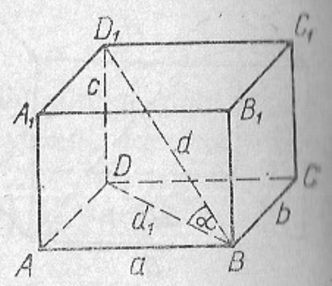
$V = abc$.

Näide 1.

Arvuta risttahuka pindala ja ruumala, kui risttahuka mõõtmed on 11 dm, 7 dm ja 5 dm (joon. 11.19).



Joon. 11.18



Joon. 11.19

Antud: $a=11$ dm; $b=7$ dm; $c=5$ dm.

Leida: S_t ja V.

Risttahuka pindala $S_t = 2(5\cdot7+5\cdot11+7\cdot11) = 2(35+55+77) = 2\cdot167 = 334$ dm².

Risttahuka ruumala $V = 7\cdot5\cdot11 = 35\cdot11 = 385$ dm³.

Näide 2.

Arvuta risttahuka pindala ja ruumala, kui tema pikkus on 4 dm, laius 3 dm ning diagonaal 13 dm (joon. 11.15).

Antud: $a=4$ dm; $b=3$ dm; $d=13$ dm.

Leida: S_t ja V.

1. Risttahuka kõrguse saame arvutada, kasutades omadust 2:
   $a^2+b^2+c^2=d^2$; $c^2=d^2-a^2-b^2$;
   $c=\sqrt{d^2-a^2-b^2}=\sqrt{169-16-9}=\sqrt{144}=12$ dm.
2. Risttahuka pindala $S_t = 2(4\cdot3+4\cdot12+3\cdot12) = 2(12+48+36) = 2\cdot96 = 192$ dm².
3. Risttahuka ruumala $V = 4\cdot3\cdot12 = 144$ dm³.

Näide 3.

Risttahuka pikkus on 12 cm, kõrgus 10 cm ja põhja diagonaal 13 cm. Arvuta risttahuka pindala ja ruumala (joon. 11.15).

Antud: $a=12$ cm; $c=10$ cm; $d_1=13$ cm.

Leida: S_t ja V.

1. Risttahuka laiuse leiame Pythagorase teoreemi järgi:
   $a^2+b^2=d_1^2$; $b^2=d_1^2-a^2$;
   $b=\sqrt{d_1^2-a^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$ cm.
2. Risttahuka pindala $S_t = 2(12\cdot10+12\cdot5+10\cdot5) = 2(12+60+50) = 2\cdot230 = 460$ cm².
3. Risttahuka ruumala $V = 12\cdot13\cdot5 = 780$ cm³.

Näide 4.

Risttahuka pikkus on 8,5 cm, laius 3,6 cm ja tema diagonaal moodustab põhjaga nurga 50°. Leida risttahuka kõrgus ja diagonaal (joon. 11.19).

Antud: $a=8{,}5$ cm; $b=3{,}6$ cm; $\alpha=50°$.

Leida: c ja d.

1. Risttahuka põhja diagonaali leiame kolmnurgast ABD Pythagorase teoreemi järgi:

$d_1^2=a^2+b^2$; $d_1=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8{,}5^2+3{,}6^2}=\sqrt{95{,}21}\approx 9{,}8$ cm.

2. Risttahuka kõrguse leiame kolmnurgast BDD_1:

$\tan 50°=\frac{c}{d_1}$; $c=d_1\cdot\tan 50°=9{,}76\cdot 1{,}19\approx 12$ cm; $c\approx 12$ cm.

3. Risttahuka diagonaali leiame kolmnurgast BDD_1:

$\cos 50°=\frac{d_1}{d}$; $d=\frac{d_1}{\cos 50°}=\frac{9{,}76}{0{,}643}\approx 15$ cm; $d\approx 15$ cm.

11.5. KUUP. KUUBI PINDALA JA RUUMALA.

Kuup on risttahukas, mille mõõtmed on võrdsed (joon. 11.20).

Kuubi omadusi.

1. Kuubil on 6 kongruentset ruudukujulist tahku.
2. Kuubi diagonaali ruut võrdub kolmekordse serva pikkuse ruuduga.

$d^2=3a^2$.

Kuubi pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.21.

Kuubi pindala võrdub kuuekordse serva pikkuse ruuduga (joon. 11.21).

$S_t=6a^2$.

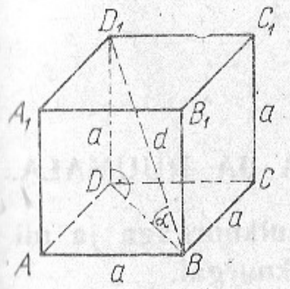
Kuubi ruumala võrdub serva pikkuse kuubiga.

$V=a^3$.

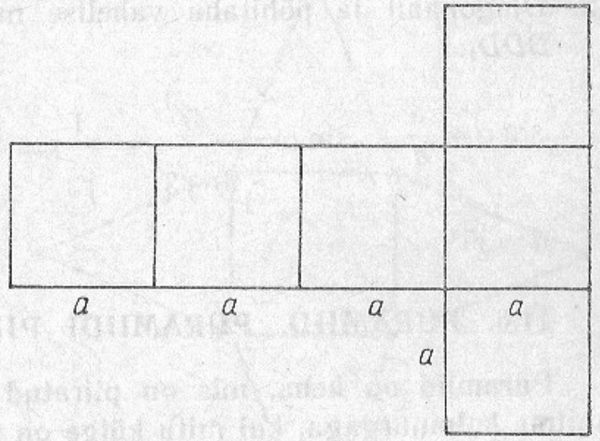
Näide 1.

Kuubi serva pikkus on 4 cm. Leida kuubi pindala ja ruumala.
Antud: $a=4$ cm.
Leida: S_t ja V.

1. Kuubi pindala $S_t=6a^2$; $S_t=6\cdot 4^2=6\cdot 16=96$ cm^2.
2. Kuubi ruumala $V=a^3$; $V=4^3=64$ cm^3.



Joon. 11.20



Joon. 11.21

Näide 2.

Kuubi diagonaal on 9 cm. Leida serva pikkus.

Antud: $d=9$ cm.

Leida: a.

Kuubi serva leiame kuubi omadust 2 kasutades:

$d^2=3a^2$; $a^2=\frac{d^2}{3}$; $a=\sqrt{\frac{d^2}{3}}=\sqrt{\frac{3\cdot 9}{3}}=\sqrt{27}\approx 5{,}2$ cm;

$a\approx 5{,}2$ cm.

Näide 3.

Kuubi serv on 5 dm. Leia kuubi diagonaali ja põhitahu vaheline nurk (joon. 11.20).

Antud: $a=5$ dm.

Leida: α.

1. Kuubi diagonaal $d^2=3a^2$; $d=\sqrt{3\cdot 5^2}=5\sqrt{3}$ dm.

2. Diagonaali ja põhitahu vahelise nurga leiame kolmnurgast BDD_1:

$$\sin\alpha=\frac{a}{d};\quad \sin\alpha=\frac{\cancel{5}^{1}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx\frac{1{,}73}{3}=0{,}577.$$

$\alpha=35^\circ$.

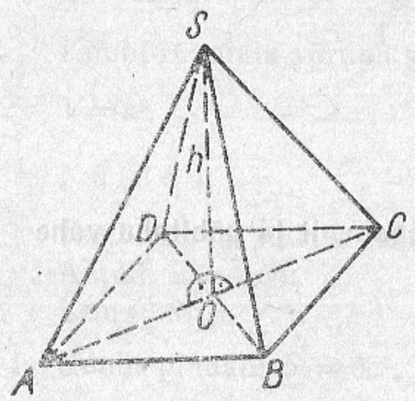
11.6. PÜRAMIID. PÜRAMIIDI PINDALA JA RUUMALA.

Püramiid on keha, mis on piiratud ühe hulknurgaga ja nii mitme kolmnurgaga, kui mitu külge on sel hulknurgal.

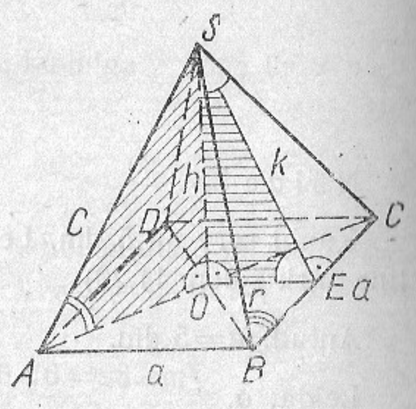
Korrapärase püramiidi põhi on korrapärane hulknurk, külgservad on võrdsed ja külgtahud on kongruentsed võrdhaarsed kolmnurgad. Püramiidi kõrguseks nimetatakse tipu kaugust põhjast.

Joonisel 11.22 on kujutatud korrapärane püramiid, kus S, A, B, C, D on tipud;
$ABCD$ on põhi;
ABS, BCS, CDS, ADS on külgtahud;
AS, BS, CS, DS on külgservad;
AB, BC, CD, AD on põhiservad;
SO on kõrgus h ($SO\perp ABCD$).

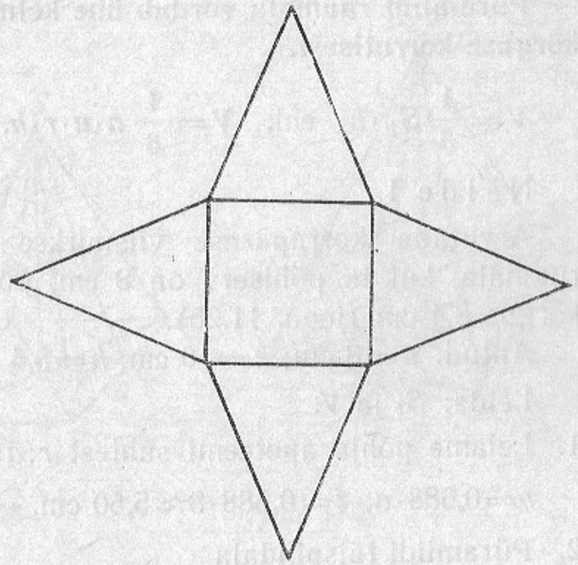
Joonisel 11.23 on kujutatud korrapärane püramiid, kus
$\angle SEO$ — nurk külgtahu ja põhitahu vahel;
$\angle SAO$ — nurk külgserva ja põhitahu vahel;



Joon. 11.22



Joon. 11.23



Joon. 11.24

$\angle SBE$ — nurk külgserva ja põhiserva vahel;
$\angle BSC$ — külgtahu tipunurk;
ES — püramiidi apoteem k ($ES\perp BC$);
EO — püramiidi põhja apoteem r ($EO\perp BC$).

Korrapärase püramiidi pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.24.

Korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi (külgtahu kõrguse) poole korrutisega.

$S_k=\frac{1}{2}\underbrace{n\cdot a}_{\text{ümbermõõt}}\cdot k$, kus n on põhja tippude arv ja a on põhiserv.

Korrapärase püramiidi põhja pindala S_p (korrapärase hulknurga pindala) avaldub valemiga (jaot. 9.11.6.)

$$S_p=\frac{1}{2}n\cdot a\cdot r,$$

kus r on põhja apoteem.

Korrapärase püramiidi täispindala võrdub külgpindala ja põhja pindala summaga.

$S_t=S_k+S_p$ ehk $S_t=\frac{1}{2}n\cdot a(k+r)$.

Püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

$$V=\frac{1}{3}S_p\cdot h \quad \text{ehk} \quad V=\frac{1}{6}n\cdot a\cdot r\cdot h.$$

Näide 1.

Arvutada korrapärase viisnurkse püramiidi täispindala ja ruumala, kui ta põhiserv on 8 cm, püramiidi apoteem 10 cm ja kõrgus 8,4 cm (joon. 11.25).

Antud: $a=8$ cm; $k=10$ cm; $h=8{,}4$ cm.

Leida: S_t ja V.

1. Leiame põhja apoteemi suhtest $r:a=0{,}688$ (jaot. 9.11.6.):

   $r=0{,}688\cdot a$; $r=0{,}688\cdot 8\approx 5{,}50$ cm.

2. Püramiidi täispindala

$$S_t=\frac{1}{2}n\cdot a(k+r)=\frac{\overset{4}{\cancel{1}}\cdot 5\cdot\overset{4}{\cancel{8}}(10+5{,}50)}{\underset{1}{\cancel{2}}}=20\cdot 15{,}50=310 \text{ cm}^2$$

3. Püramiidi ruumala

$$V=\frac{1}{3}S_p\cdot h=\frac{\overset{4}{\cancel{1}}\cdot\underbrace{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}}_{3}\cdot 5\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 5{,}50\cdot\overbrace{\overset{2{,}8}{\cancel{8{,}4}}}^{h}}{\underbrace{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}}_{3}}=20\cdot 5{,}50\cdot 2{,}8=$$

$$=308\approx 310 \text{ cm}^3.$$

Näide 2.

Arvutada korrapärase nelinurkse püramiidi täispindala ja ruumala, kui põhiserv on 10 cm ja külgtahu ning põhitahu vaheline nurk on 60° (joon. 11.26).

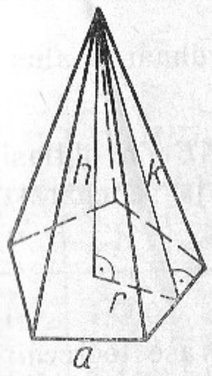
Antud: $a=10$ cm; $\alpha=60°$.

Leida: S_t ja V.

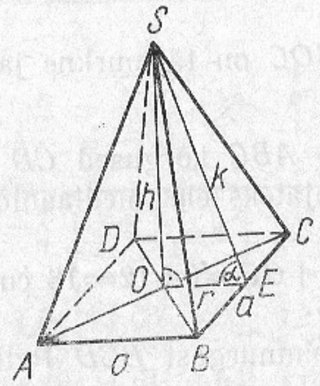
1. Püramiidi apoteemi leiame täisnurksest kolmnurgast SEO:

   $k=2\cdot r=2\cdot\frac{a}{2}=a=10$ cm.

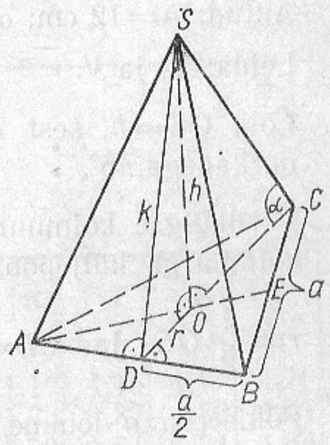
   (kolmnurgast SEO $\widehat{ESO}=90°-\alpha=90°-60°=30°$ ja 30°-se nurga vastaskaatet (r) on pool hüpotenuusi).



Joon. 11.25



Joon. 11.26



Joon. 11.27

2. Püramiidi kõrguse leiame samast kolmnurgast Pythagorase teoreemi kasutades:

   $k^2=h^2+r^2$; $h^2=k^2-r^2$; $h=\sqrt{k^2-r^2}=$

   $=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}\approx 8{,}65$ cm.

3. Püramiidi põhja pindala $S_p=a^2=10^2=100$ cm².

4. Püramiidi külgpindala

$$S_k=\frac{1}{2}n\cdot a\cdot k=\frac{\overset{2}{\cancel{1}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 10\cdot 10}{\underset{1}{\cancel{2}}}=200 \text{ cm}^2.$$

5. Püramiidi täispindala $S_t=S_p+S_k=100+200=300$ cm².

6. Püramiidi ruumala

$$V=\frac{1}{3}S_p\cdot h=\frac{1\cdot 100\cdot 8{,}65}{3}=\frac{865}{3}=288{,}3\ldots\approx 290 \text{ cm}^3.$$

Näide 3.

Arvutada korrapärase kolmnurkse püramiidi täispindala ja ruumala, kui püramiidi kõrgus on 12 cm ja külgserva ning põhitahu vaheline nurk 45° (joon. 11.27).

Antud: $h=12$ cm; $\alpha=45°$.

Leida: S_t ja V.

1. Lõik $OC=h$, sest $\triangle SOC$ on täisnurkne ja võrdhaarne alusnurkadega 45°.

2. Võrdkülgse kolmnurga ABC kõrgused CD ja AE on ühtlasi kolmnurga küljepoolitajateks ehk mediaanideks ja sellepärast

$$r=\frac{1}{2}OC \quad \text{ja} \quad CD=r+OC=6+12=18 \text{ cm}.$$

3. Põhiserva a leiame kolmnurgast BCD Pythagorase teoreemi järgi:

$$a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+CD^2;\ a^2-\frac{a^2}{4}=CD^2;\ \frac{3}{4}a^2=CD^2;\ a^2=\frac{4\cdot CD^2}{3};$$

$$a^2=\frac{4\cdot 18^2}{3}=\frac{4\cdot 18\cdot \cancel{18}^{6}}{\cancel{3}_{1}}=24\cdot 18=432;$$

$$a=\sqrt{432}=20{,}7\ldots\approx 21 \text{ cm}.$$

4. Püramiidi apoteemi leiame kolmnurgast SDO Pythagorase teoreemi järgi:

$$k^2=h^2+r^2;\ k^2=12^2+6^2=144+36=200;$$
$$k=\sqrt{200}=14{,}1\ldots\approx 14 \text{ cm}.$$

5. Püramiidi täispindala

$$S_t=S_k+S_p=\frac{1}{2}n\cdot a(k+r)=\frac{1\cdot 3\cdot 20{,}7(14{,}1+6)}{2}=$$
$$=\frac{3\cdot 20{,}7\cdot 20{,}1}{2}=624{,}1\ldots\approx 620 \text{ cm}^2.$$

6. Püramiidi ruumala

$$V=\frac{1}{6}\cdot n\cdot a\cdot r\cdot h=\frac{1\cdot 3\cdot 20{,}7\cdot \cancel{6}^{1}\cdot 12}{\cancel{6}_{1}}=36\cdot 20{,}7=745{,}2\approx 750 \text{ cm}^3.$$

12. TABELID.

12.1 RUUDUD.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,15	1,17	1,19
1,1	1,210	1,23	1,25	1,28	1,30	1,32	1,35	1,37	1,39	1,41
1,2	1,440	1,46	1,49	1,51	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66
1,3	1,690	1,71	1,74	1,77	1,80	1,82	1,85	1,88	1,90	1,93
1,4	1,960	1,99	2,02	2,05	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22
1,5	2,250	2,28	2,31	2,34	2,37	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53
1,6	2,560	2,59	2,62	2,66	2,69	2,72	2,76	2,79	2,82	2,86
1,7	2,890	2,92	2,96	2,99	3,03	3,06	3,10	3,13	3,17	3,20
1,8	3,240	3,28	3,31	3,35	3,39	3,42	3,46	3,50	3,53	3,57
1,9	3,610	3,65	3,69	3,72	3,76	3,80	3,84	3,88	3,92	3,96
2,0	4,000	4,04	4,08	4,12	4,16	4,20	4,24	4,28	4,33	4,37
2,1	4,410	4,45	4,49	4,54	4,58	4,62	4,67	4,71	4,75	4,80
2,2	4,840	4,88	4,93	4,97	5,02	5,06	5,11	5,15	5,20	5,24
2,3	5,290	5,34	5,38	5,43	5,48	5,52	5,57	5,62	5,66	5,71
2,4	5,760	5,81	5,86	5,90	5,95	6,00	6,05	6,10	6,15	6,20
2,5	6,250	6,30	6,35	6,40	6,45	6,50	6,55	6,60	6,66	6,71
2,6	6,760	6,81	6,86	6,92	6,97	7,02	7,08	7,13	7,18	7,24
2,7	7,290	7,34	7,40	7,45	7,51	7,56	7,62	7,67	7,73	7,78
2,8	7,840	7,90	7,95	8,01	8,07	8,12	8,18	8,24	8,29	8,35
2,9	8,410	8,47	8,53	8,58	8,64	8,70	8,76	8,82	8,88	8,94
3,0	9,000	9,06	9,12	9,18	9,24	9,30	9,36	9,42	9,49	9,55
3,1	9,610	9,67	9,73	9,80	9,86	9,92	9,99	10,0	10,1	10,2
3,2	10,24	10,3	10,4	10,4	10,5	10,6	10,6	10,7	10,8	10,8
3,3	10,89	11,0	11,0	11,1	11,1	11,2	11,3	11,4	11,4	11,5
3,4	11,56	11,6	11,7	11,8	11,8	11,9	12,0	12,0	12,1	12,2
3,5	12,25	12,3	12,4	12,5	12,5	12,6	12,7	12,7	12,8	12,9
3,6	12,96	13,0	13,1	13,2	13,2	13,3	13,4	13,5	13,5	13,6
3,7	13,69	13,8	13,8	13,9	14,0	14,1	14,1	14,2	14,3	14,4
3,8	14,44	14,5	14,6	14,7	14,7	14,8	14,9	15,0	15,1	15,1
3,9	15,21	15,3	15,4	15,4	15,5	15,6	15,7	15,8	15,8	15,9

Ruudud

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,0	16,00	16,1	16,2	16,2	16,3	16,4	16,5	16,6	16,6	16,7
4,1	16,81	16,9	17,0	17,1	17,1	17,2	17,3	17,4	17,5	17,6
4,2	17,64	17,7	17,8	17,9	18,0	18,1	18,1	18,2	18,3	18,4
4,3	18,49	18,6	18,7	18,7	18,8	18,9	19,0	19,1	19,2	19,3
4,4	19,36	19,4	19,5	19,6	19,7	19,8	19,9	20,0	20,1	20,2
4,5	20,25	20,3	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8	20,9	21,0	21,1
4,6	21,16	21,3	21,3	21,4	21,5	21,6	21,7	21,8	21,9	22,0
4,7	22,09	22,2	22,3	22,4	22,5	22,6	22,7	22,8	22,9	22,9
4,8	23,04	23,1	23,2	23,3	23,4	23,5	23,6	23,7	23,8	23,9
4,9	24,01	24,1	24,2	24,3	24,4	24,5	24,6	24,7	24,8	24,9
5,0	25,00	25,1	25,2	25,3	25,4	25,5	25,6	25,7	25,8	25,9
5,1	26,01	26,1	26,2	26,3	26,4	26,5	26,6	26,7	26,8	26,9
5,2	27,04	27,1	27,3	27,4	27,5	27,6	27,7	27,8	27,9	28,0
5,3	28,09	28,2	28,3	28,4	28,5	28,6	28,7	28,8	28,9	29,1
5,4	29,16	29,3	29,4	29,5	29,6	29,7	29,8	29,9	30,0	30,1
5,5	30,25	30,4	30,5	30,6	30,7	30,8	30,9	31,0	31,1	31,2
5,6	31,36	31,5	31,6	31,7	31,8	31,9	32,0	32,1	32,3	32,4
5,7	32,49	32,6	32,7	32,8	32,9	33,1	33,2	33,3	33,4	33,5
5,8	33,64	33,8	33,9	34,0	34,1	34,2	34,3	34,5	34,6	34,7
5,9	34,81	34,9	35,0	35,2	35,3	35,4	35,5	35,6	35,8	35,9
6,0	36,00	36,1	36,2	36,4	36,5	36,6	36,7	36,8	37,0	37,1
6,1	37,21	37,3	37,5	37,6	37,7	37,8	37,9	38,1	38,2	38,3
6,2	38,44	38,6	38,7	38,8	38,9	39,1	39,2	39,3	39,4	39,6
6,3	39,69	39,8	39,9	40,1	40,2	40,3	40,4	40,6	40,7	40,8
6,4	40,96	41,1	41,2	41,3	41,5	41,6	41,7	41,9	42,0	42,1
6,5	42,25	42,4	42,5	42,6	42,8	42,9	43,0	43,2	43,3	43,4
6,6	43,56	43,7	43,8	44,0	44,1	44,2	44,4	44,5	44,6	44,8
6,7	44,89	45,0	45,2	45,3	45,4	45,6	45,7	45,8	46,0	46,1
6,8	46,24	46,4	46,5	46,6	46,8	46,9	47,1	47,2	47,3	47,5
6,9	47,6	47,7	47,9	48,0	48,1	48,3	48,4	48,6	48,7	48,9
7,0	49,00	49,1	49,3	49,4	49,6	49,7	49,8	50,0	50,1	50,3
7,1	50,41	50,6	50,7	50,8	51,0	51,1	51,3	51,4	51,6	51,7
7,2	51,84	52,0	52,1	52,3	52,4	52,6	52,7	52,9	53,0	53,1
7,3	53,29	53,4	53,6	53,7	53,9	54,0	54,2	54,3	54,5	54,6
7,4	54,76	54,9	55,1	55,2	55,4	55,5	55,7	55,8	56,0	56,1

Ruudud

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	56,25	56,4	56,6	56,7	56,9	57,0	57,2	57,3	57,5	57,6
7,6	57,76	57,9	58,1	58,2	58,4	58,5	58,7	58,8	59,0	59,1
7,7	59,29	59,4	59,6	59,8	59,9	60,1	60,2	60,4	60,5	60,7
7,8	60,84	61,0	61,2	61,3	61,5	61,6	61,8	61,9	62,1	62,3
7,9	62,41	62,6	62,7	62,9	63,0	63,2	63,4	63,5	63,7	63,8
8,0	64,00	64,2	64,3	64,5	64,6	64,8	65,0	65,1	65,3	65,4
8,1	65,61	65,8	65,9	66,1	66,3	66,4	66,6	66,7	66,9	67,1
8,2	67,24	67,4	67,6	67,7	67,9	68,1	68,2	68,4	68,6	68,7
8,3	68,89	69,1	69,2	69,4	69,6	69,7	69,9	70,1	70,2	70,4
8,4	70,56	70,7	70,9	71,1	71,2	71,4	71,6	71,7	71,9	72,1
8,5	72,25	72,4	72,6	72,7	72,9	73,1	73,3	73,4	73,6	73,8
8,6	73,96	74,1	74,3	74,5	74,6	74,8	75,0	75,2	75,3	75,5
8,7	75,69	75,9	76,0	76,2	76,4	76,6	76,7	76,9	77,1	77,3
8,8	77,44	77,6	77,8	78,0	78,1	78,3	78,5	78,7	78,9	79,0
8,9	79,21	79,4	79,6	79,7	79,9	80,1	80,3	80,5	80,6	80,8
9,0	81,00	81,2	81,4	81,5	81,7	81,9	82,1	82,3	82,4	82,6
9,1	82,81	83,0	83,2	83,4	83,5	83,7	83,9	84,1	84,3	84,5
9,2	84,64	84,8	85,0	85,2	85,4	85,6	85,7	85,9	86,1	86,3
9,3	86,49	86,7	86,9	87,0	87,2	87,4	87,6	87,8	88,0	88,2
9,4	88,36	88,5	88,7	88,9	89,1	89,3	89,5	89,7	89,9	90,1
9,5	90,25	90,4	90,6	90,8	91,0	91,2	91,4	91,6	91,8	92,0
9,6	92,16	92,4	92,5	92,7	92,9	93,1	93,3	93,5	93,7	93,9
9,7	94,09	94,3	94,5	94,7	94,9	95,1	95,3	95,5	95,6	95,8
9,8	96,04	96,2	96,4	96,6	96,8	97,0	97,2	97,4	97,6	97,8
9,9	98,01	98,2	98,4	98,6	98,8	99,0	99,2	99,4	99,6	99,8

Kui arvus N nihutada koma ühe koha võrra, siis arvus N^2 tuleb koma nihutada vastassuunas kahe koha võrra.

Tabel on määratud arvude ruutude leidmiseks. Igale lehekülje on paigutatud ridade numeratsiooni veerg, kümme ruutude veergu.

Et tõsta ruutu kolmekohaline arv vahemikust 1 kuni 10, leitakse rida, mille numbriks on selle arvu esimesest kahest numbrist moodustatud arv, ja veerg, mille pealkirjaks on antud arvu kolmas number. Nende lõikekohast leiamegi otsitava ruudu ümardatult nelja- või kolmekohaliseks.

Näited.

$2{,}86^2 = 8{,}18$ (rida 2,8, ruutude veerg 6).

$7{,}08^2 = 50{,}1$ (rida 7,0, ruutude veerg 8).

$9{,}4^2 = 9{,}40^2 = 88{,}36$ (rida 9,4, ruutude veerg 0).

Et tõsta 1-st väiksemat või 10-st suuremat arvu ruutu, tuleb see arv kujutada kahe teguri korrutisena, kus üheks teguriks on 1 ja 10 vahel olev arv ja teiseks 10, 100, 1000, ... või 0,1, 0,01, 0,001, ..., ning tõsta siis mõlemad tegurid ruutu (esimene tabeli abil, teine peast).

Näited.

$808^2 = (8{,}08 \cdot 100)^2 = 8{,}08^2 \cdot 100^2 = 65{,}3 \cdot 10\,000 = 653\,000.$

$0{,}151^2 = (1{,}51 \cdot 0{,}1)^2 = 1{,}51^2 \cdot 0{,}1^2 = 2{,}28 \cdot 0{,}01 = 0{,}0228.$

Kui on omandatud juba küllaldaselt vilumusi, võib vahepealsed tehted kirjutamata jätta.

12.2. RUUTJUURED.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
1,2	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14
1,3	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18
1,4	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
1,5	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26
1,6	1,26	1,27	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30
1,7	1,30	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,34
1,8	1,34	1,35	1,35	1,35	1,36	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
1,9	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,40	1,41	1,41
2,0	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	1,45
2,1	1,45	1,45	1,46	1,46	1,46	1,47	1,47	1,47	1,48	1,48
2,2	1,48	1,49	1,49	1,49	1,50	1,50	1,50	1,51	1,51	1,51
2,3	1,52	1,52	1,52	1,53	1,53	1,53	1,54	1,54	1,54	1,55
2,4	1,55	1,55	1,56	1,56	1,56	1,57	1,57	1,57	1,57	1,58
2,5	1,58	1,58	1,59	1,59	1,59	1,60	1,60	1,60	1,61	1,61
2,6	1,61	1,62	1,62	1,62	1,62	1,63	1,63	1,63	1,64	1,64
2,7	1,64	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66	1,66	1,66	1,67	1,67
2,8	1,67	1,68	1,68	1,68	1,69	1,69	1,69	1,69	1,70	1,70
2,9	1,70	1,71	1,71	1,71	1,71	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73
3,0	1,73	1,73	1,74	1,74	1,74	1,75	1,75	1,75	1,75	1,76
3,1	1,76	1,76	1,77	1,77	1,77	1,77	1,78	1,78	1,78	1,79
3,2	1,79	1,79	1,79	1,80	1,80	1,80	1,81	1,81	1,81	1,81
3,3	1,82	1,82	1,82	1,82	1,83	1,83	1,83	1,84	1,84	1,84
3,4	1,84	1,85	1,85	1,85	1,85	1,86	1,86	1,86	1,87	1,87
3,5	1,87	1,87	1,88	1,88	1,88	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89
3,6	1,90	1,90	1,90	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,92
3,7	1,92	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94	1,95
3,8	1,95	1,95	1,95	1,96	1,96	1,96	1,96	1,97	1,97	1,97
3,9	1,97	1,98	1,98	1,98	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	2,00
4,0	2,00	2,00	2,00	2,01	2,01	2,01	2,01	2,02	2,02	2,02
4,1	2,02	2,03	2,03	2,03	2,03	2,04	2,04	2,04	2,04	2,05
4,2	2,05	2,05	2,05	2,06	2,06	2,06	2,06	2,07	2,07	2,07
4,3	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,09	2,09	2,09	2,09	2,10
4,4	2,10	2,10	2,10	2,10	2,11	2,11	2,11	2,11	2,12	2,12

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,5	2,12	2,12	2,13	2,13	2,13	2,13	2,14	2,14	2,14	2,14
4,6	2,14	2,15	2,15	2,15	2,15	2,16	2,16	2,16	2,16	2,17
4,7	2,17	2,17	2,17	2,17	2,18	2,18	2,18	2,18	2,19	2,19
4,8	2,19	2,19	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,21	2,21	2,21
4,9	2,21	2,21	2,22	2,22	2,22	2,22	2,23	2,23	2,23	2,23
5,0	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24	2,25	2,25	2,25	2,25	2,26
5,1	2,26	2,26	2,26	2,26	2,27	2,27	2,27	2,27	2,28	2,28
5,2	2,28	2,28	2,28	2,29	2,29	2,29	2,29	2,30	2,30	2,30
5,3	2,30	2,30	2,31	2,31	2,31	2,31	2,32	2,32	2,32	2,32
5,4	2,32	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,34	2,34	2,34	2,34
5,5	2,35	2,35	2,35	2,35	2,36	2,36	2,36	2,36	2,36	2,36
5,6	2,37	2,37	2,37	2,37	2,37	2,38	2,38	2,38	2,38	2,39
5,7	2,39	2,39	2,39	2,39	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,41
5,8	2,41	2,41	2,41	2,41	2,42	2,42	2,42	2,42	2,42	2,43
5,9	2,43	2,43	2,43	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
6,0	2,45	2,45	2,45	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47
6,1	2,47	2,47	2,47	2,48	2,48	2,48	2,48	2,48	2,49	2,49
6,2	2,49	2,49	2,49	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,51	2,51
6,3	2,51	2,51	2,51	2,52	2,52	2,52	2,52	2,52	2,53	2,53
6,4	2,53	2,53	2,53	2,53	2,54	2,54	2,54	2,54	2,55	2,55
6,5	2,55	2,55	2,55	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,57	2,57
6,6	2,57	2,57	2,57	2,57	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,59
6,7	2,59	2,59	2,59	2,59	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	2,61
6,8	2,61	2,61	2,61	2,61	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62
6,9	2,63	2,63	2,63	2,63	2,63	2,64	2,64	2,64	2,64	2,64
7,0	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,66	2,66	2,66	2,66	2,66
7,1	2,66	2,67	2,67	2,67	2,67	2,67	2,68	2,68	2,68	2,68
7,2	2,68	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,70
7,3	2,70	2,70	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	2,72	2,72
7,4	2,72	2,72	2,72	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,74
7,5	2,74	2,74	2,74	2,74	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75
7,6	2,76	2,76	2,76	2,76	2,76	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77
7,7	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,79	2,79	2,79	2,79
7,8	2,79	2,79	2,80	2,80	2,80	2,80	2,80	2,81	2,81	2,81
7,9	2,81	2,81	2,81	2,82	2,82	2,82	2,82	2,82	2,82	2,83

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8,0	2,83	2,83	2,83	2,83	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84
8,1	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,86	2,86	2,86	2,86
8,2	2,86	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,88	2,88	2,88
8,3	2,88	2,88	2,88	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,90
8,4	2,90	2,90	2,90	2,90	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91
8,5	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,93	2,93	2,93	2,93
8,6	2,93	2,93	2,94	2,94	2,94	2,94	2,94	2,94	2,95	2,95
8,7	2,95	2,95	2,95	2,95	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96
8,8	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,98	2,98	2,98	2,98
8,9	2,98	2,98	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	3,00	3,00
9,0	3,00	3,00	3,00	3,00	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01
9,1	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,03	3,03	3,03	3,03
9,2	3,03	3,03	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,05	3,05
9,3	3,05	3,05	3,05	3,05	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06
9,4	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,08	3,08	3,08	3,08
9,5	3,08	3,08	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,10	3,10
9,6	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,11	3,11	3,11	3,11	3,11
9,7	3,11	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,13	3,13	3,13
9,8	3,13	3,13	3,13	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14
9,9	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,16	3,16	3,16	3,16
10,	3,16	3,18	3,19	3,21	3,22	3,24	3,26	3,27	3,29	3,30
11,	3,32	3,33	3,35	3,36	3,38	3,39	3,41	3,42	3,44	3,45
12,	3,46	3,48	3,49	3,50	3,52	3,54	3,55	3,56	3,58	3,59
13,	3,60	3,62	3,63	3,65	3,66	3,67	3,69	3,70	3,71	3,73
14,	3,74	3,75	3,77	3,78	3,79	3,81	3,82	3,83	3,85	3,86
15,	3,87	3,89	3,90	3,91	3,92	3,94	3,95	3,96	3,97	3,99
16,	4,00	4,01	4,02	4,04	4,05	4,06	4,07	4,09	4,10	4,11
17,	4,12	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,20	4,21	4,22	4,23
18,	4,24	4,25	4,27	4,28	4,29	4,30	4,31	4,32	4,34	4,35
19,	4,36	4,37	4,38	4,39	4,40	4,41	4,43	4,44	4,45	4,46
20,	4,47	4,48	4,49	4,51	4,52	4,53	4,54	4,55	4,56	4,57
21,	4,58	4,59	4,60	4,62	4,63	4,64	4,65	4,66	4,67	4,68
22,	4,69	4,70	4,71	4,72	4,73	4,74	4,75	4,76	4,77	4,79
23,	4,80	4,81	4,82	4,83	4,84	4,85	4,86	4,87	4,88	4,89
24,	4,90	4,91	4,92	4,93	4,94	4,95	4,96	4,97	4,98	4,99

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25,	5,00	5,01	5,02	5,03	5,04	5,05	5,06	5,07	5,08	5,09
26,	5,10	5,11	5,12	5,13	5,14	5,15	5,16	5,17	5,18	5,19
27,	5,20	5,21	5,22	5,22	5,23	5,24	5,25	5,26	5,27	5,28
28,	5,29	5,30	5,31	5,32	5,33	5,34	5,35	5,36	5,37	5,38
29,	5,39	5,39	5,40	5,41	5,42	5,43	5,44	5,45	5,46	5,47
30,	5,48	5,49	5,50	5,50	5,51	5,52	5,53	5,54	5,55	5,56
31,	5,57	5,58	5,59	5,59	5,60	5,61	5,62	5,63	5,64	5,65
32,	5,66	5,67	5,67	5,68	5,69	5,70	5,71	5,72	5,73	5,74
33,	5,74	5,75	5,76	5,77	5,78	5,79	5,80	5,81	5,81	5,82
34,	5,83	5,84	5,85	5,86	5,87	5,87	5,88	5,89	5,90	5,91
35,	5,92	5,92	5,93	5,94	5,95	5,96	5,97	5,97	5,98	5,99
36,	6,00	6,01	6,02	6,02	6,03	6,04	6,05	6,06	6,07	6,07
37,	6,08	6,09	6,10	6,11	6,12	6,12	6,13	6,14	6,15	6,16
38,	6,16	6,17	6,18	6,19	6,20	6,20	6,21	6,22	6,23	6,24
39,	6,24	6,25	6,26	6,27	6,28	6,28	6,29	6,30	6,31	6,32
40,	6,32	6,33	6,34	6,35	6,36	6,36	6,37	6,38	6,39	6,40
41,	6,40	6,41	6,42	6,43	6,43	6,44	6,45	6,46	6,47	6,47
42,	6,48	6,49	6,50	6,50	6,51	6,52	6,53	6,53	6,54	6,55
43,	6,56	6,57	6,57	6,58	6,59	6,60	6,60	6,61	6,62	6,63
44,	6,63	6,64	6,65	6,66	6,66	6,67	6,68	6,69	6,69	6,70
45,	6,71	6,72	6,72	6,73	6,74	6,75	6,75	6,76	6,77	6,77
46,	6,78	6,79	6,80	6,80	6,81	6,82	6,83	6,83	6,84	6,85
47,	6,86	6,86	6,87	6,88	6,88	6,89	6,90	6,91	6,91	6,92
48,	6,93	6,94	6,94	6,95	6,96	6,96	6,97	6,98	6,99	6,99
49,	7,00	7,01	7,01	7,02	7,03	7,04	7,04	7,05	7,06	7,06
50,	7,07	7,08	7,09	7,09	7,10	7,11	7,11	7,12	7,13	7,13
51,	7,14	7,15	7,16	7,16	7,17	7,18	7,18	7,19	7,20	7,20
52,	7,21	7,22	7,22	7,23	7,24	7,25	7,25	7,26	7,27	7,27
53,	7,28	7,29	7,29	7,30	7,31	7,31	7,32	7,33	7,33	7,34
54,	7,35	7,36	7,36	7,37	7,38	7,38	7,39	7,40	7,40	7,41
55,	7,41	7,42	7,43	7,44	7,44	7,45	7,46	7,46	7,47	7,48
56,	7,48	7,49	7,50	7,50	7,51	7,52	7,52	7,53	7,54	7,54
57,	7,55	7,56	7,56	7,57	7,58	7,58	7,59	7,60	7,60	7,61
58,	7,62	7,62	7,63	7,64	7,64	7,65	7,66	7,66	7,67	7,67
59,	7,68	7,69	7,69	7,70	7,71	7,71	7,72	7,73	7,73	7,74

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60,	7,75	7,75	7,76	7,77	7,77	7,78	7,78	7,79	7,80	7,80
61,	7,81	7,82	7,82	7,83	7,84	7,84	7,85	7,85	7,86	7,87
62,	7,87	7,88	7,89	7,89	7,90	7,91	7,91	7,92	7,92	7,93
63,	7,94	7,94	7,95	7,96	7,96	7,97	7,97	7,98	7,99	7,99
64,	8,00	8,01	8,01	8,02	8,02	8,03	8,04	8,04	8,05	8,06
65,	8,06	8,07	8,07	8,08	8,09	8,09	8,10	8,11	8,11	8,12
66,	8,12	8,13	8,14	8,14	8,15	8,15	8,16	8,17	8,17	8,18
67,	8,19	8,19	8,20	8,20	8,21	8,22	8,22	8,23	8,23	8,24
68,	8,25	8,25	8,26	8,26	8,27	8,28	8,28	8,29	8,29	8,30
69,	8,31	8,31	8,32	8,32	8,33	8,34	8,34	8,35	8,35	8,36
70,	8,37	8,37	8,38	8,38	8,39	8,40	8,40	8,41	8,41	8,42
71,	8,43	8,43	8,44	8,44	8,45	8,46	8,46	8,47	8,47	8,48
72,	8,49	8,49	8,50	8,50	8,51	8,51	8,52	8,53	8,53	8,54
73,	8,54	8,55	8,56	8,57	8,57	8,58	8,58	8,58	8,59	8,60
74,	8,60	8,61	8,61	8,62	8,63	8,63	8,64	8,64	8,65	8,65
75,	8,66	8,67	8,67	8,68	8,68	8,69	8,69	8,70	8,71	8,71
76,	8,72	8,72	8,73	8,73	8,74	8,75	8,75	8,76	8,76	8,77
77,	8,77	8,78	8,79	8,79	8,80	8,80	8,81	8,81	8,82	8,83
78,	8,83	8,84	8,84	8,85	8,85	8,86	8,87	8,87	8,88	8,88
79,	8,89	8,89	8,90	8,91	8,91	8,92	8,92	8,93	8,93	8,94
80,	8,94	8,95	8,96	8,96	8,97	8,97	8,98	8,98	8,99	8,99
81,	9,00	9,01	9,01	9,02	9,02	9,03	9,03	9,04	9,04	9,05
82,	9,06	9,06	9,07	9,07	9,08	9,08	9,09	9,09	9,10	9,10
83,	9,11	9,12	9,12	9,13	9,13	9,14	9,14	9,15	9,15	9,16
84,	9,17	9,17	9,18	9,18	9,19	9,19	9,20	9,20	9,21	9,21
85,	9,22	9,22	9,23	9,24	9,24	9,25	9,25	9,26	9,26	9,27
86,	9,27	9,28	9,28	9,29	9,30	9,30	9,31	9,31	9,32	9,32
87,	9,33	9,33	9,34	9,34	9,35	9,35	9,36	9,36	9,37	9,38
88,	9,38	9,39	9,39	9,40	9,40	9,41	9,41	9,42	9,42	9,43
89,	9,43	9,44	9,44	9,45	9,46	9,46	9,47	9,47	9,48	9,48
90,	9,49	9,49	9,50	9,50	9,51	9,51	9,52	9,52	9,53	9,53
91,	9,54	9,54	9,55	9,56	9,57	9,57	9,57	9,58	9,58	9,59
92,	9,59	9,60	9,60	9,61	9,61	9,62	9,62	9,63	9,63	9,64
93,	9,64	9,65	9,65	9,66	9,66	9,67	9,67	9,68	9,69	9,69
94,	9,70	9,70	9,71	9,71	9,72	9,72	9,73	9,73	9,74	9,74

Ruutjuured

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
95,	9,75	9,75	9,76	9,76	9,77	9,77	9,78	9,78	9,79	9,79
96,	9,80	9,80	9,81	9,81	9,82	9,83	9,83	9,83	9,84	9,84
97,	9,85	9,85	9,86	9,86	9,87	9,87	9,88	9,88	9,89	9,89
98,	9,90	9,90	9,91	9,91	9,92	9,92	9,93	9,93	9,94	9,94
99,	9,95	9,95	9,96	9,96	9,97	9,97	9,98	9,98	9,99	9,99

Kui arvus N nihutada koma 2, 4, 6, ... koha võrra, siis arvus $\sqrt{N}$ tuleb koma nihutada vastassuunas 1, 2, 3, ... koha võrra.

Tabel on määratud ruutjuure leidmiseks mistahes kolmekohalisest arvust. See tabel sisaldab kõigi vahemikku 1 kuni 100 kuuluvate kolmekohaliste arvude ruutjuurte kolmekohalisi väärtusi. Ehituselt sarnaneb tabel ruutude tabeliga.

Näited.

$\sqrt{9,73}=3,12$ (rida 97, veerg 3).

$\sqrt{36,4}=6,03$ (rida 36, veerg 4).

$\sqrt{886}=\sqrt{8,86\cdot 10^2}=\sqrt{8,86}\cdot\sqrt{10^2}=2,98\cdot 10=29,8.$

$\sqrt{8860}=\sqrt{88,6\cdot 10^2}=\sqrt{88,6}\cdot\sqrt{10^2}=9,41\cdot 10=94,1,$

$\sqrt{0,00496}=\sqrt{49,6\cdot 0,0001}=\sqrt{49,6}\cdot\sqrt{0,0001}=7,04\cdot 0,01=0,0704.$

Kirjutame ainult lõpptulemuse.

12.3. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

	sin	cos	tan	cot
0°	0,000	1,000	0,000	—
1°	0,017	1,000	0,017	57,3
2°	0,035	0,999	0,035	28,6
3°	0,052	0,999	0,052	19,1
4°	0,070	0,998	0,070	14,3
5°	0,087	0,996	0,087	11,4
6°	0,105	0,995	0,105	9,51
7°	0,122	0,993	0,123	8,14
8°	0,139	0,990	0,141	7,12
9°	0,156	0,988	0,158	6,31
10°	0,174	0,985	0,176	5,67
11°	0,191	0,982	0,194	5,14
12°	0,208	0,978	0,213	4,70
13°	0,225	0,974	0,231	4,33
14°	0,242	0,970	0,249	4,01
15°	0,259	0,966	0,268	3,73
16°	0,276	0,961	0,287	3,49
17°	0,292	0,956	0,306	3,27
18°	0,309	0,951	0,325	3,08
19°	0,326	0,946	0,344	2,90
20°	0,342	0,940	0,364	2,75
21°	0,358	0,934	0,384	2,61
22°	0,375	0,927	0,404	2,48
23°	0,391	0,921	0,425	2,36
24°	0,407	0,914	0,445	2,25
25°	0,423	0,906	0,466	2,14
26°	0,438	0,899	0,488	2,05
27°	0,454	0,891	0,510	1,96
28°	0,469	0,883	0,532	1,88
29°	0,485	0,875	0,554	1,80
30°	0,500	0,866	0,577	1,73
31°	0,515	0,857	0,601	1,66
32°	0,530	0,848	0,625	1,60
33°	0,545	0,839	0,649	1,54
34°	0,559	0,829	0,675	1,48

	sin	cos	tan	cot
35°	0,574	0,819	0,700	1,43
36°	0,588	0,809	0,727	1,38
37°	0,602	0,799	0,754	1,33
38°	0,616	0,788	0,781	1,28
39°	0,629	0,777	0,810	1,23
40°	0,643	0,766	0,839	1,19
41°	0,656	0,755	0,869	1,15
42°	0,669	0,743	0,900	1,11
43°	0,682	0,731	0,933	1,07
44°	0,695	0,719	0,966	1,04
45°	0,707	0,707	1,00	1,00
46°	0,719	0,695	1,04	0,966
47°	0,731	0,682	1,07	0,933
48°	0,743	0,669	1,11	0,900
49°	0,755	0,656	1,15	0,869
50°	0,766	0,643	1,19	0,839
51°	0,777	0,629	1,23	0,810
52°	0,788	0,616	1,28	0,781
53°	0,799	0,602	1,33	0,754
54°	0,809	0,588	1,38	0,727
55°	0,819	0,574	1,43	0,700
56°	0,829	0,559	1,48	0,675
57°	0,839	0,545	1,54	0,649
58°	0,848	0,530	1,60	0,625
59°	0,857	0,515	1,66	0,601
60°	0,866	0,500	1,73	0,577
61°	0,875	0,485	1,80	0,554
62°	0,883	0,469	1,88	0,532
63°	0,891	0,454	1,96	0,510
64°	0,899	0,438	2,05	0,488
65°	0,906	0,423	2,14	0,466
66°	0,914	0,407	2,25	0,445
67°	0,921	0,391	2,36	0,425
68°	0,927	0,375	2,48	0,404
69°	0,934	0,358	2,61	0,384

	sin	cos	tan	cot
70°	0,940	0,342	2,75	0,364
71°	0,946	0,326	2,90	0,344
72°	0,951	0,309	3,08	0,325
73°	0,956	0,292	3,27	0,306
74°	0,961	0,276	3,49	0,287
75°	0,966	0,259	3,73	0,268
76°	0,970	0,242	4,01	0,249
77°	0,974	0,225	4,33	0,231
78°	0,978	0,208	4,70	0,213
79°	0,982	0,191	5,14	0,194
80°	0,985	0,174	5,67	0,176
81°	0,988	0,156	6,31	0,158
82°	0,990	0,139	7,12	0,141
83°	0,993	0,122	8,14	0,123
84°	0,995	0,105	9,51	0,105
85°	0,996	0,087	11,4	0,087
86°	0,998	0,070	14,3	0,070
87°	0,999	0,052	19,1	0,052
88°	0,999	0,035	28,6	0,035
89°	1,000	0,017	57,3	0,017
90°	1,000	0,000	—	0,000

Tabel võimaldab leida mistahes täisarv kraade sisaldavate teravnurkade sinuseid, koosinuseid, tangenseid ja kootangenseid. Selleks tuleb äärmisest vasakpoolsest veerust leida antud nurgale vastav kraadide arv ja ülevalt esimesest reast trigonomeetrilise funktsiooni nimetus. Rea ja veeru lõikekohast leiame antud teravnurgale vastava trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse.

Tabel lubab lahendada ka pöördülesannet, s. t. leida teravnurka tema siinuse, koosinuse, tangensi või kootangensi väärtuse järgi.

Selleks leiame antud funktsioonile vastavast veerust lähima tabeliväärtuse ja loeme selle rea esimesest veerust vastava teravnurga suuruse.

SISUNÄITAJA

Abivalemid 135
absoluutne viga 81
absoluutse vea ülemmäär 81
absoluutväärtus 55
absoluutväärtusega võrrandid 172
abstsisstelg 189
ahelarvutused arvutil 106, 120
ajaühikud 30
aksioom 21
alamtõke 82
algarv 41
algarvude tabel 41
algebraline avaldis 124
— murd 138
— avaldise arvuline väärtus 124
— murru põhiomadus 139
algebraliste murdude korrutamine ja jagamine 143
—— liitmine ja lahutamine 140
algmõisted 21
araabia numbrid 26
argument 190
aritmeetiline keskmine 71
arvkiir 31
arvkiire nullpunkt 31
arvtelg 53
arvu absoluutväärtus 55
arvude suhe 76
arvu ja vektori korrutise omadused 241
arvu kordsed 39
arvu leidmine antud osa järgi 75
arvu leidmine antud protsendi järgi 75
— lähend 81
— mõiste 25
— mõiste areng 25
— ristsumma 39
— standardkuju 84
— tegurid 39
arvuti 102
— ettevalmistamine tööks 115
— mälu kasutamine aheltehete korral 120
——— liitmisel ja lahutamisel 119
arvutused korduvate operandidega 107
arvutuslükati 89
assotsiatiivsuse seadus 16, 33, 36, 240, 242
arvu tüve numbrid 84
— õige number 83
aste 125
astme alus ehk astendaja 125
astendaja ehk astmenäitaja 125
astendamine arvutil 107, 123
astendamise mõiste 125
— reeglid 126
avaldise väärtuse arvutamine 148

Biruutvõrrand 164

Definitsioon 20
definitsiooni tingimused 20
determinant 159
diagonaallõige 331
diameeter 303
diskriminant 162
distributiivsuse seadus 36, 242

Elimineerima 158
Eukleidese teoreem 291

Funktsioon 190
funktsionaalne seos 190
funktsiooni muutumispiirkond 190
— määramispiirkond 190
funktsioon $y=ax$ 195
— $y=ax+b$ 196
— $y=\frac{a}{x}$ 198
— $y=ax^2+bx+c$ 200
funktsiooni ekstremaalväärtus 200
— esitusviisid 191
— graafik 192
— kahanemine 194
— kasvamine 194
— negatiivsuspiirkond 216
— positiivsuspiirkond 216

Geomeetriline keskmine 293
— kujund 255

Harilik murd 59
harilike murdude jagamine 66
—— korrutamine 65
—— lahutamine 63
—— liitmine 63
—— võrdlemine 62
harilike murdude võrdsuse tunnus 63
hariliku murru kümnendlähend 69
—— murdosa 60
—— laiendamine 61
—— lugeja 59
—— nimetaja 59
—— põhiomadus 60
—— taandamine 61
—— teisendamine kümnendmurruks 69
—— täisosa 60
homogeenne ruutvõrrandisüsteem 167
homoteetsete kujundite omadusi 321

homoteetsus 320
homoteetsuskeskpunkt 320
homoteetsustegur 320
hulgaelemendi kuuluvus hulka 13
—— üldtähis 12
— element 11
— täiend 19
hulk 11
hulkade esitusviisid 11
— tähistamine 11
— võrdsus 14
— ühend 17
— ühendi omadused 18
— ühisosa 15
—— omadused 16
hulkliige 132
hulkliikme jagamine üksliikmega 133
— korrutamine üksliikmega 133
hulkliikme teguriteks lahutamine 136
—— lahutamise võtted 136
hulkliikmete jagamine 134
— korrutamine 134
— lahutamine 133
— liitmine 133
hulknurga diagonaal 313
— keskpunkt 317
— külg 317
— lähisküljed 317
— nurk 314
— pindala 318
hulknurgareegel 240
hulknurga sisenurk 314
— sisenurkade summa 314
— sisepiirkond 313
— siseringjoon 315
— tipud 313
— välisnurk 314
— välisnurkade summa 314
— välispiirkond 313
— ümbermõõt 318
— ümberringjoon 315
hulknurk 313
hulknurkade sarnasus 319
hulktahuka diagonaal 330
— diagonaallõige 331
hulktahukas 330
hulktahuka serv 330
— tahk 330
hulktahuka tipp 330
hüperbool 199
hüperbooli võrrand 205

Irratsionaalarv 79
irratsionaalarvude hulk 79
isekülgne kolmnurk 275

Jagaja 37
jagamine arvutil 105, 117
— lükatil 92
jagamise seadused 38
jagatav 37
jagatis 37
jagatise põhiomadus 38
— vea ülemmäär 87
jaotuvusseadus 36, 342
jagavuse tunnused 39
joone võrrand 204
juur 128
juuravaldiste koondamine 145
— teisendamine 145, 148
juurija (juurenäitaja) 128
juurimine arvutil 123
juurimise reeglid 129
juuritav 128
juurte korrutamine ja jagamine 145
järguklassid 26
järguühik 27, 31
järkarv 31
järeldus 21
järelduvusseos 21

Kaarekraad 304
kaare mõõtühik 304
kaasnurgad 267
kahanemise väljendamine protsentides 77
kahe hulga elementide vahelise vastavuse esitusviisid 191
— muutujaga lineaarvõrrandisüsteem 157
—— lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine 158
kaldnurkse kolmnurga lahendamine 233
kaldprisma 331
kasvamise väljendamine protsentides 77
kesknurk 304
kiir 255
kiirte teoreem 287
kohavektor 243
kollineaarsus 246
kolmnurga alus 274
— elemendid 273
— joonestamine 284
— kesklõik 279
— kõrgus 274
— külgede võrdlemine 277
— küljed 273
— lahendamine 231, 233
— mediaan 279
— nurgapoolitaja 280
— pindala 277
— raskuskese 280
kolmnurgareegel 239
kolmnurga sisenurga poolitaja omadus 285
kolmnurga sisenurk 278
— sisenurkade summa 279

kolmnurga siseringjoon 281
— siseringjoone keskpunkt 281
— — raadius 281
— tipud 273
— välisnurga poolitaja omadus 289
— välisnurk 278
— välisnurkade summa 279
— ümbermõõt 277
— ümberringjoon 281
— ümberringjoone keskpunkt 281
— — raadius 281
kolmnurk 273
kolmnurkade kongruentsus 282
— kongruentsuse tunnused 282
— liigitamine 275
— sarnasus 287
— sarnasuse tunnused 288
kolnurkse prisma pindala 334
— — ruumala 335
koma asukoha määramine lükatil arvutamisel 90
kombineeritud tehted lükatil 97
kommutatiivsuse seadus 16, 18, 33, 36, 240
kongruentsus 282
kordarv 41
koordinaattasand 189
koordinaatteljestik 189
koosinusteoreem 234
korrapärane hulknurk 316
korrapärase hulknurga apoteem 317
— — pindala 319
— — ümbermõõt 318
korrapärane prisma 332
korrapärase prisma külgpindala 333
— — pinnalaotus 333
— — ruumala 333
— — täispindala 333
korrapärane püramiid 344
korrapärase püramiidi apoteem 345
— — kõrgus 344
— — külgpindala 345
— — pinnalaotus 345
— — põhja apoteem 345
— — ruumala 346
— — täispindala 345
korrutamine arvutil 105, 117
— lükatil 93
korrutamise abivalemid 135
— assotsiatiivsuse seadus 36
— distributiivsuse seadus 36
— jaotuvuse seadus 36
— kommutatiivsuse seadus 36
— seadused 36
— vahetuvusseadus 36
— ühenduvusseadus 36
korrutis 35
korrutise vea ülemmäär 86
kujundi lüke 324
— sümmeetriatelg 329
kujundite kongruentsus 282
kujutamisühik 31
kumer hulknurk 313
kustutussõrmis 102
kuubi omadusi 342
— pindala 342
— pinnalaotus 343
— ruumala 342
kuup 342
kõrguse teoreem 292
kõrvunurgad 261
kõõl 303
kõõlhulknurk 314
kõõlkaheksanurk 316
kõõlkolmnurk 316
kõõlkuusnurk 316
kõõlnelinurk 316
kümnendmurd 47
kümnendmurdude jagamine 51
— korrutamine 50
— lahutamine 49
— liitmine 48
— võrdlemine 48
kümnendmurru murdosa 47
— teisendamine harilikuks murruks 68
— täisosa 47
— ümardamine 69
kümnendsüsteemi mõiste 26

Lahutamine arvutil 105, 116
ligikaudne arv 81
lihtmurd 59
liigmurd 59
liigmurru murdosa 60
— täisosa 60
liitmine arvutil 105, 116
liitmise assotsiatiivsuse seadus 33
— kommutatiivsuse seadus 33
— seadused 33
lineaarne seos 196
lineaarse seose graafik 196
lineaarvõrrand 155
lineaarvõrrandi lahendamine graafiku abil 208
— normaalkuju 155
lineaarvõrrandisüsteem 157
lineaarvõrrandisüsteemi lahend 157
— lahendamine 158
— lahendamine graafiku abil 211
— lahendamise võtted 158
— normaalkuju 158
lineaarvõrratus 180
lineaarvõrratuse lahendamine graafiku abil 216
lineaarvõrratusesüsteem 181
läbimõõt 303
lähisnurgad 267

lõigu jaotamine osadeks 253
— korrutamine arvuga 254
— otspunktid 252
— projektsioon 291
— sisepunktid 252
— sümmeetriatelg 253
lõik 252
lõikude suhe 286
— summa 252
— vahe 252
— võrdlemine 252
lõikuvad sirged 264
lõplik hulk 13
lõpmatu hulk 13
— mitteperioodiline kümnendmurd 79
— perioodiline kümnendmurd 69
lähendi absoluutne viga 81
lükati 89
lükati põhiskaalad 89
— põhiskaala omadus 90
lüke 324

Mall 259
meetermõõdustik 28
meetermõõdustiku ühikute kordsust tähistavad eesliited 28
meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas 289
mis tahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid 222
mitterange võrratus 179
mittetäielikud ruutvõrrandid 163
murdjoon 272
—, kumer 272
—, kinnine 272
—, lahtine 272
—, lihtne 272
murdjoone lülid 272
— otspunktid 272
— tipud 272
murdvõrrand 169
murdvõrrandi lahendamine 169
murruline astendaja 130
murru nimetaja vabastamine irratsionaalsusest 147
muutumispiirkond 181
mäluga arvuti 102, 110
mäluseade 110
märgi muutmine algebralise murru ees 140
määramispiirkond 190
mõiste definitsioon 20
mõiste tunnus 20
mõõtühik 28

Naturaalarv 25, 30
naturaalarvude jagamine 37
— jaguvus 39
— jäägiga jagamine 43
naturaalarvude hulga põhiomadused 32
— korrutamine 35
— lahutamine 33
— liitmine 32
naturaalarvude vahelisi seoseid 31
negatiivne arv 52
— astendaja 127
— nurk 225
nelja tehte arvuti 102
numbri mõiste 26
nullvektor 239
nurga haarad 256
nurga koosinus 221, 222
— kootangens 221, 223
— kraad 258
— minut 258
— mõõtühik 30, 245
nurgapoolitaja 272
nurga sekund 258
— siinus 221, 222
— sisepiirkond 256
— suuruse mõõtmine 259
— sümmeetriatelg 271
— tangens 221, 223
— tipp 256
— tähistamine 256
nurk 255
nurkade kongruentsus 257
— liigid 245
— summa 260
— vahe 260
— võrdlemine 256
nürinurk 258
nürinurkne kolmnurk 277

Operand 106
ordinaattelg 189
osahulk 14

Parabool 200
parabooli haripunkt 201
— võrrand 206
paralleelsed sirged 264
paralleelsete haaradega nurgad 265
parameeter 173
parameetrit sisaldavad võrrandid 173
peegelduskeskpunkt 327
peegeldus punktist 327
— sirgest 328
pii ( ) 312
piirdenurk 306
piisav tingimus 23
pikkusühikud 28
pindalaühikud 29
positiivne arv 52
— nurk 225
positsiooniline arvusüsteem 26
prisma 331
— diagonaal 332

diagonaali kõrgus 331
— põhi 331
protsendi leidmine arvust 73
— mõiste 72
protsentsuhe 76
protsentülesannete lahendamine arvutil 108
protsentuaalne jaotus 74
punkti koordinaat 53
— koordinaadid tasandil 189
puutepunkt 307
puutuja 307
puutujahulknurk 315
puutuja joonestamine 308
— tunnus 308
põiknurgad 267
pöördarv 66
pöördarvu leidmine arvutil 108
pöörde keskpunkt 325
pöördenurk 326
pöördlause 22
pöördvõrdeline seos 198
pöördvõrdelise seose graafik 199
pöördteoreem 21
pöördvastandteoreem 23
pööre 325
püramiid 344
püstprisma 331
püströöptahuka külgpindala 336
— omadusi 336
— pinnalaotus 337
— ruumala 337
püströöptahukas 335
püströöptahuka täispindala 336
Pythagorase teoreem 289
— — arvutil 122

Raadius 303
rahvusvaheline mõõtühikute süsteem 28
rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi põhiühikud 30
range võrratus 179
raskusühikud 29
ratsionaalarv 67
ratsionaalarvude hulk 67
— omadusi 71
ratsionaalavaldis 124
reaalarvude hulk 80
— hulga omadusi 80
register 110
relatiivne viga 83
relatiivse vea ülemmäär 83
riba 269
— kesksirge 270
— laius 270
— ristlõik 270
— sisepiirkond 270
— äärsirge 269
ring 303
ringi pindala 312
— sisepiirkond 303
— välispiirkond 303
ringjoon 303
ringjoone kaar 304
— kõõl 303
— lõikaja 307, 309
— pikkus 312
— puutuja 281, 307, 309
— võrrand 207
ringjoonte vastastikune asend 311
ristkülik 297
ristküliku joonestamine 298
— omadusi 297
— pindala 298
— ümbermõõt 298
ristsumma 39
risttahuka diagonaal 339
— omadusi 339
— pindala 340
— pinnalaotus 340
— ruumala 340
risttahukas 339
ristuvate haaradega nurgad 265
romb 299
rombi omadusi 299
— pindala 299
— ümbermõõt 299
rooma numbrid 26
ruudu leidmine lükatil 94
— omadusi 300
— pindala 300
— ümbermõõt 300
ruumalaühikud 29
ruumiline kujund 330
ruut 300
ruutfunktsioon 200
ruutfunktsiooni graafik 200
— ekstremaalväärtused 200
— erijuhud 202
ruutjuure leidmine lükatil 96
ruutkolmliige 161
ruutkolmliikme nullkohad 161
— tegureiks lahutamine 165
ruutvõrrand 161
ruutvõrrandi diskriminant 162
— lahendamine graafiku abil 209
— lahendite omadused 164
— lahendivalemid 161
— lahendivalemi uurimine 163
— normaalkuju 161
ruutvõrrandisüsteem 165
ruutvõrrandisüsteemi lahendamine 166
ruutvõrrandisüsteemi lahendamine graafiku abil 213
ruutvõrratus 184
ruutvõrratuse algebraline lahendamine 184

ruutvõrratuse lahendamine graafiku abil 188, 219
rööpkülik 294
rööpküliku alus 295
— diagonaal 295
— joonestamine 296
— kõrgus 295
— lähisküljed 295
— lähisnurgad 295
— omadusi 295
— pindala 296
rööpkülikureegel 240
rööpküliku tunnused 296
— vastasküljed 295
— vastasnurgad 295
— ümbermõõt 296

Samasihilised sirged 264
— vektorid 237
samasus 153
samasuunalised vektorid 238
samaväärsed laused 21
— võrrandid 154
— võrratused 180
sarnased juured 145
— üksliikmed 132
sarnaste üksliikmete koondamine 132
segaarv 60
seos 190
seoseid tehete komponentide ja resultaatide vahel 44
siinusteoreem 233
sinusoid 228
sirge 255, 263
— sihivektor 263
sirgete lõikepunkt 264
— lõikumine 263
— paralleelsuse tunnus 267
sirge võrrand 204, 208
sirgjoon vt. sirge
sirglõik vt. lõik
sirgnurk 257
seesmine puutumine 311
siseringjoon 280
skalaar 237
standardkuju 84
suhe 76
suhteline viga 83
suhtelise vea ülemmäär 83
summa vea ülemmäär 85
suurim ühistegur 41
sõrmiste funktsioonid 111
sõrmistik 102
sümmeetria keskpunkt 327

Taandamisvalemid 225
taandatud ruutvõrrand 162
tabloo 102
tangensoid 230
tangenstelg 229
tarvilik tingimus 23
tasand 255
tasandi liikumine 329
— lüke 325
— peegeldus punktist 327
— — sirgest 328
— pööre 325
teadusarvuti 102
tegur 35
tehete järjekord 43, 59, 72
— teisi omadusi 45
tehted algebraliste murdudega 140
— harilike ja kümnendmurdudega 70
— hulkadega 18
— jäävate (konstantsete) suurustega lükatil 118
— koordinaatides esitatud vektoritega 246
tekstülesannete lahendamine 174
telgedega paralleelsete sirgete võrrandid 208
telgsümmeetria 320
telgede võrrandid 208
teooria 21
teoreem 21
teoreemi eeldus 21
— tõestus 21
— väide 21
teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid 221
teravnurk 257
teravnurkne kolmnurk 277
tippnurgad 262
tipunurk 277
trapets 301
trapetsi alus 301
— haar 301
— kesklõik 301
— kõrgus 301
— liigid 301
— pindala 301
— ümbermõõt 301
trigonomeetrilised funktsioonid arvutil 122
trigonomeetriliste funktsioonide graafikud 228
— — pöördfunktsioonid arvutil 123
— — rakendusi 231
— — vahelised seosed 226
— — väärtused 225
— — väärtuste muutumine 230
tsentraalsümmeetria 327
tuletatud mõisted 21
täielik ruutvõrrand 161
täiendusnurgad 222
täisarv 54
täisarvu astendamine 58
täisarvude hulga omadusi 55
— hulk 54

täisarvude jagamine 57
— järjestamine 54
— korrutamine 57
— lahutamine 56
— liitmine 55
täisavaldis 124
täisnurk 257
täisnurkne kolmnurk 277
— trapets 302
täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem 292
—— lahendamine 231
—— pindala 278
täispööre 258
täpne arv 81, 86
täpsuse ligikaudne hindamine 85, 87
tühihulk 13
tüvenumber 84

Vahe 33
vahetuvusseadus 16, 18, 33, 36, 240
vahe vea ülemmäär 85
varunumber 86
vastandarvud 53
vastandlause 22
vastandteoreem 23
vastandvektorid 239
vastassuunalised vektorid 238
vastuväiteline tõestus 23
vektor 237
vektori avaldamine kahe mitteparalleelse vektori kaudu 247
— koordinaadid 243
— korrutamine arvuga 241
— pikkus 237, 245
— siht 237
vektorite kasutamine tõestamisel 248
— skalaarkorrutis 250
— summa 239
—— omadused 240
— vahe 239
— võrdsus 238
Vieté'i teoreem 164
väärtuskohad 102
vähim ühiskordne 42
võrdeline jaotamine 78
võrdekujulise võrrandi lahendamine lükatil 90
võrdeline seos 195
võrdelise seose graafik 195
võrdelised lõigud 310
võrde põhiomadus 78
— siseliikmed 78
võrdetegur 78
võrde välisliikmed 78
võrdhaarne kolmnurk 275
võrdhaarse kolmnurga omadusi 277
võrdhaarne trapets 302
võrdkülgne kolmnurk 277
— kõõlhulknurk 315
võrdkülgse kolmnurga omadusi 277
võrdus 152
võrduse omadused 152
võrrand 153
võrrandi lahend 153
— põhiomadused 154
võrrandite samaväärsus 154
võrratus 179
võrratuse lahendamine 180
—— graafiku abil 217
— lahendihulk 180
— omadusi 179
võrratusesüsteem 181
võrratusesüsteemi lahendamine 181
— lahendihulk 181
võrratuste samaväärsus 180
võrre 78
võõrlahend 155
vähendaja 33
vähendatav 33
vähim ühiskordne 42
välimine puutumine 311
väärtuskoht 102

Ühe muutujaga lineaarvõrrand 155
—— lineaarvõrrandi lahendamine 156
—— lineaarvõrratus 180
—— lineaarvõrratuse lahendamine 180
—— lineaarvõrratusesüsteem 181
—— lineaarvõrratuse süsteemi lahendamine 181
ühend 17
ühenduvusseadus 16, 18, 33, 36, 240, 242
ühikring 228
ühikvektor 243
ühikvektori koordinaadid 223
ühisosa 15
ühistegur 41
üksliige 132
üksliikmete jagamine 133
— koondamine 132
— korrutamine 132
ülemtõke 82
ületäide 114
ümardamine 69
ümardamise reegel 70
ümberringjoon 281, 314

MATEMAATILISED SÜMBOLID

$a \# b$	— lõik a on paralleelne ja võrdne lõiguga b
$\wedge$	— sidesõna *ja*
$\vee$	— sidesõna *või*
$\Rightarrow$	— sõnaühend *kui . . . , siis . . .* (järelduvusseos ehk *järeldub*)
$\Leftrightarrow$	— sõnaühend *. . . siis ja ainult siis, kui . . .* (*on samaväärne*)
$\neg$	— sõnaühend *pole tõsi, et . . .*
S	— pindala
S_k	— külgpindala
S_t	— täispindala
S_p	— põhja pindala
V	— ruumala
P	— ümbermõõt
c	— ringjoone pikkus
π	— ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe
n	— hulknurga tippude või külgede arv
r	— siseringjoone raadius
R	— ümberringjoone raadius
d	— läbimõõt ehk diameeter või diagonaal
$\vec{AB}$	— vektor AB
$\vec{a}$	— vektor a
$\lvert\vec{a}\rvert$	— vektori a pikkus
$\lvert\vec{AB}\rvert$	— vektori AB pikkus
$\vec{O}$	— nullvektor
$\vec{AB} = (X; Y)$	— vektor AB koordinaatidega X ja Y
y	— funktsiooni tähis
x	— argumendi tähis
Δx	— argumendi muut
Δy	— funktsiooni muut
$f(x)$	— funktsiooni üldtähis
$f(\alpha)$	— funktsiooni väärtus kohal α
$\sin \alpha$	— nurga α siinus
$\cos \alpha$	— nurga α koosinus
$\tan \alpha$	— nurga α tangens
$\cot \alpha$	— nurga α kootangens

KREEKA TÄHESTIK

A, α	— alfa
B, β	— beeta
Γ, γ	— gamma
Δ, δ	— delta
E, ϵ	— epsilon
Z, ς	— dzeeta
H, η	— eeta
Θ, ϑ	— teeta
I, ι	— ioota
K,	— kapa
Λ, λ	— lambda
M, μ	— müü
N, ν	— nüü
Ξ, ξ	— ksii
O, o	— omikron
Π, π	— pii
P,	— roo
Σ, σ	— sigma
T, τ	— tau
Υ, υ	— üpsilon
Φ, φ	— fii
X, χ	— hii
Ψ, ψ	— psii
Ω, ω	— oomega